Physik I

BIOL/PHARM

Übungsstunde 2

04.10.2021

- Kinematik
- Würfe
- Kreisbewegungen

Jesse Zhang, zhangje@ethz.ch

Kinematik

Lernziele

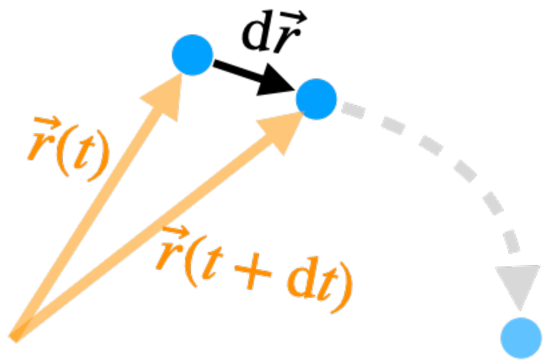
- Ortskoordinaten und Zeit nutzen um kinematische Prozesse zu beschreiben
- Ort/Geschwindigkeit/Beschleunigung Diagramme interpretieren und erstellen
- Ort/ Geschwindigkeit/Beschleunigung von linearen und beschleunigten Bewegungen berechnen

Ortskurve und Geschwindigkeit

Ortskurve / Positionsvektor

Wo befindet sich das Objekt zur Zeit t?

$$\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

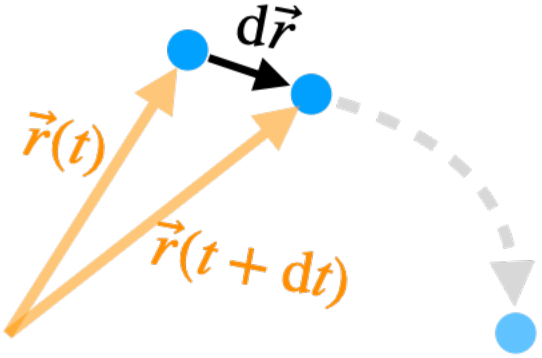


Ortskurve und Geschwindigkeit

Ortskurve / Positionsvektor

Wo befindet sich das Objekt zur Zeit t?

$$\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



Geschwindigkeitsvektor

Wohin bewegt sich das Objekt zur Zeit t?

Wieviel ändert sich der Ort pro Zeiteinheit?

$$\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Ortskurve und Geschwindigkeit

Ortskurve / Positionsvektor

Wo befindet sich das Objekt zur Zeit t?

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Ableiten

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Integrieren

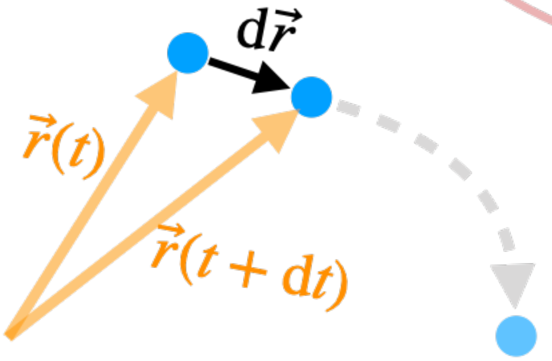
$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\, dt'$$

Geschwindigkeitsvektor

Wohin bewegt sich das Objekt zur Zeit t?

Wieviel ändert sich der Ort pro Zeiteinheit?

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$



Ortskurve und Geschwindigkeit

<u>Ortskurve / Positionsvektor</u>

Wo befindet sich das Objekt zur Zeit t?

$$\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Ableiten

$$\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{t}) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{dt}} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}$$

Integrieren

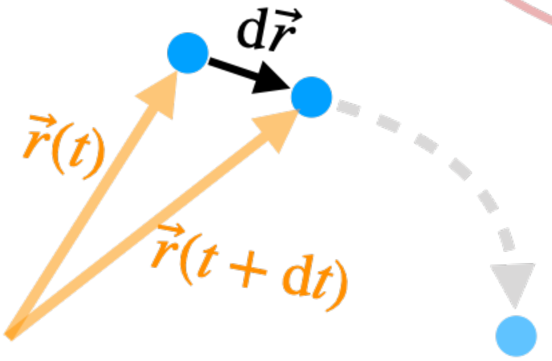
$$\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) - \vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t_0}) = \int_{t_0}^{t} \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{t'})\ \mathrm{dt'}$$

<u>Geschwindigkeitsvektor</u>

Wohin bewegt sich das Objekt zur Zeit t?

Wieviel ändert sich der Ort <u>pro</u> Zeiteinheit?

$$\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

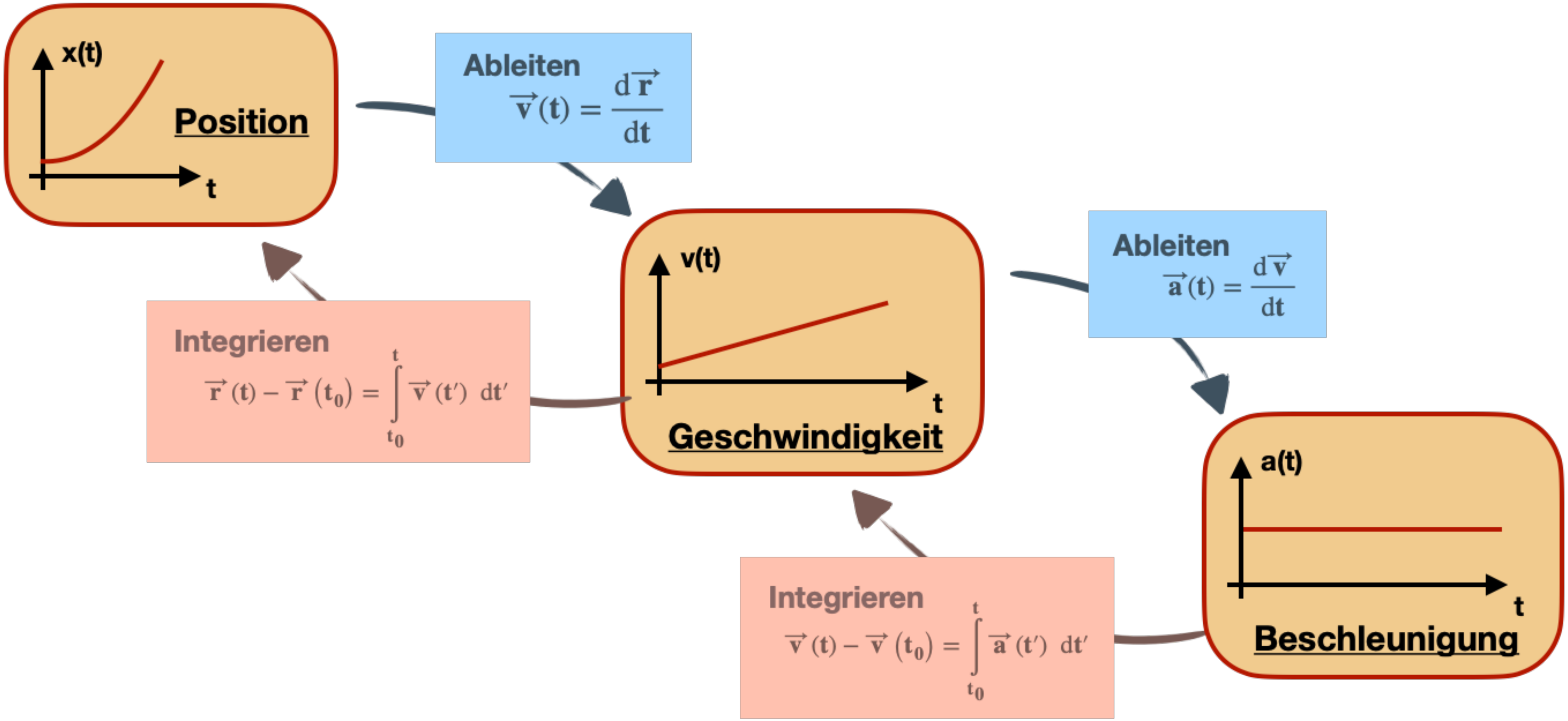


Bekannt aus Schule $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

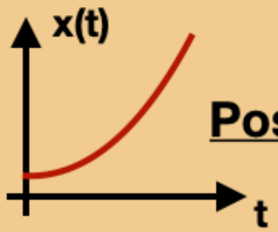
Spezialfall für 1D & v(t)=konst.

<u>allgemeiner:</u> $\mathbf{v} = \dfrac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}$

Zusammenhänge von : $\vec{r} \leftrightarrow \vec{v} \leftrightarrow \vec{a}$



Zusammenhänge von : $\vec{r} \leftrightarrow \vec{v} \leftrightarrow \vec{a}$



Position

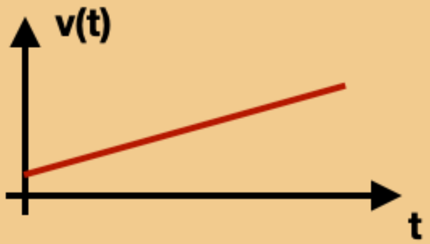
Ableiten

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Spezialfall 1:

Konstante Geschwindigkeit $\leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$$



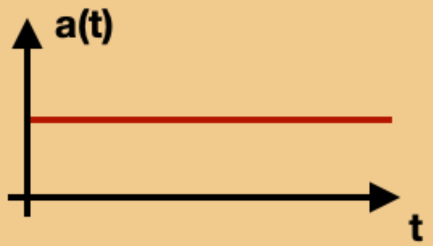
Geschwindigkeit

Ableiten

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Integrieren

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\ dt'$$



Beschleunigung

Spezialfall 2:

Konstante Beschleunigung $\leftrightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

Integrieren

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\ dt'$$

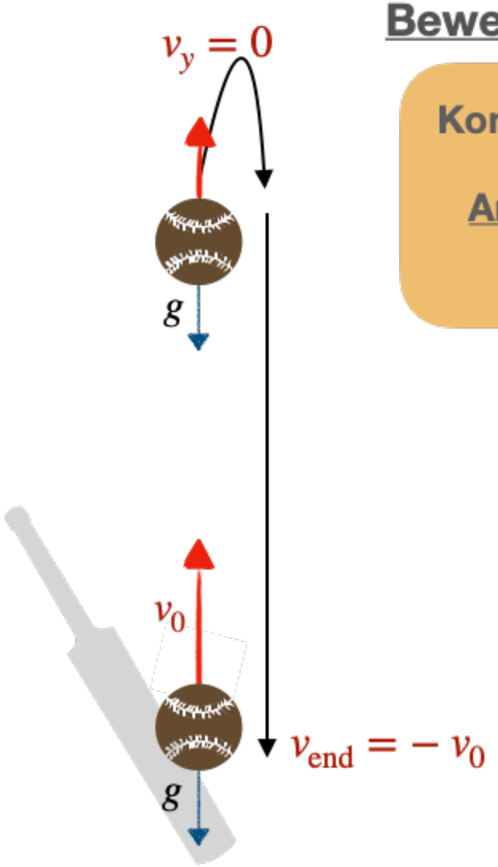
Würfe

Lernziele

- Kinematik von verschiedenne Wurfbewegungen beschreiben
- Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körpers in Formeln ausdrücken können

Senkrechter Wurf

Objekt wird mit Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nach oben geschossen.
Konstante Beschleunigung bremst bis zum Scheitelpunkt, dann fällt das Objekt.



Bewegung ist rein vertikal - betrachte in 1D

Konstante Beschleunigung: $a_y = -g = const.$

Anfangsbedingungen: $y(0) = y_0$ $\quad v(t) = v_0$

Wie hoch und wie schnell startet das Objekt?

Zweifache Integration liefert v(t) und y(t)

$$v_y(t) = v_0 - gt \qquad y(t) = y_0 + v_0\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

⇒ **Dann: Löse nach gesuchtem Parameter auf!**

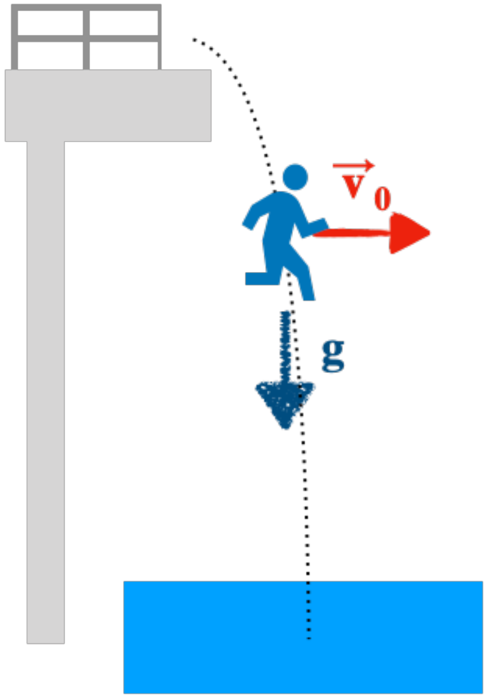
Spezialfall freier Fall:

$v_0 = 0 \qquad y_0 = h$

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Waagrechter Wurf

Konstante Geschwindigkeit in horizontaler Richtung.
Freier Fall in der Vertikalen.



Objekt wird konstant nach unten beschleunigt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = -g\,\hat{e}_y$$

<u>**Anfangsbedingungen:**</u>

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_0\,\hat{e}_x \qquad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = y_0\,\hat{e}_y$$

Wo ist das Objekt am Anfang mit welcher Geschwindigkeit?

Integration - *Tipp: behandle Komponenten getrennt*

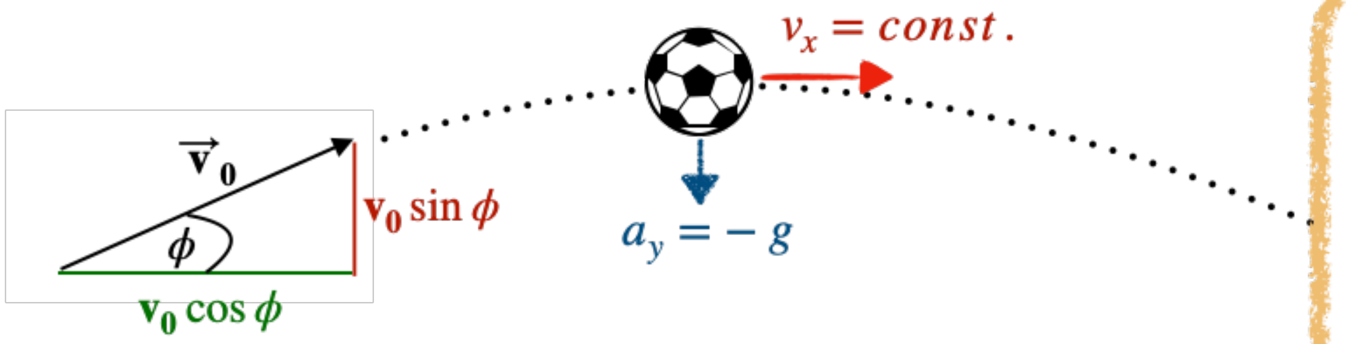
$$v_x(t) = v_0 \qquad v_y(t) = -gt$$

$$x(t) = v_x\,t \qquad y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Verbunden via t

Schräger Wurf

Konstante Geschwindigkeit in horizontaler Richtung.
Senkrechter Wurf in der Vertikalen.



Beschleunigung konstant

$$\vec{a} = -g\ \hat{e}_y$$

Anfangsbedingungen:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_0 = v_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

horizontal: gleichförmige Bewegung

$$v_x(t) = v_0 \cos\phi$$

$$x(t) = x_0 + v_0\ t \cos\phi$$

vertikal: senkrechter Wurf

$$v_y(t) = v_0 \sin\phi - gt$$

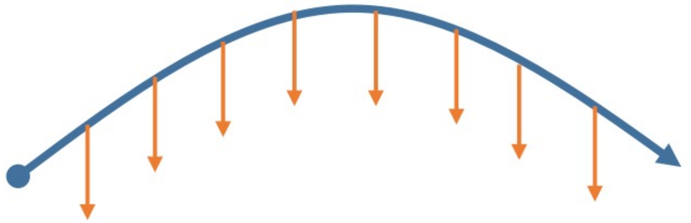
$$y(t) = y_0 + v_0\ t \sin\phi - \frac{1}{2} g t^2$$

Verbunden via t und v_0

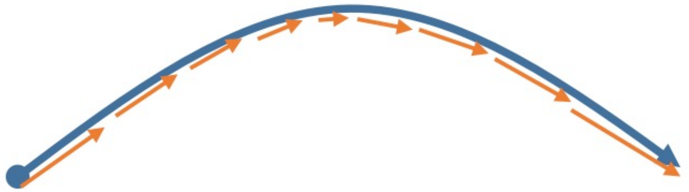
Verständnisfrage: Würfe

Ich werfe einen Stein in den See. Welche Skizze zeigt die Beschleunigung des Steines über die Flugbahn hinweg?

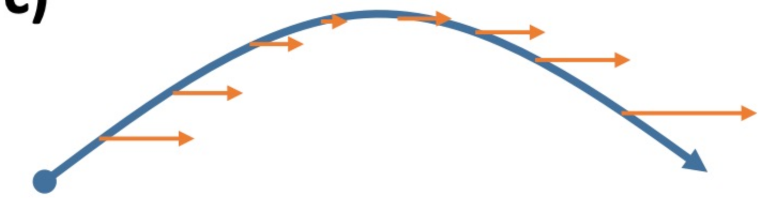
a)



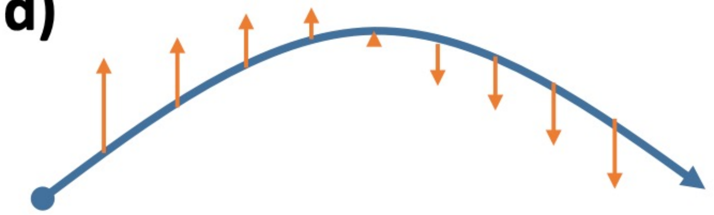
b)



c)



d)



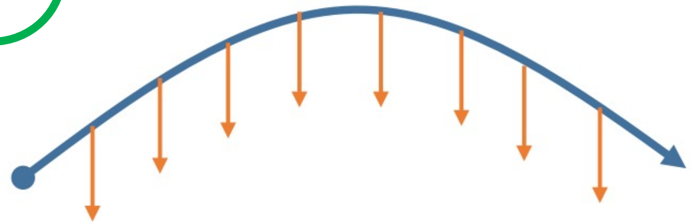
https://pollev.com/jessezhang348

Verständnisfrage: Würfe

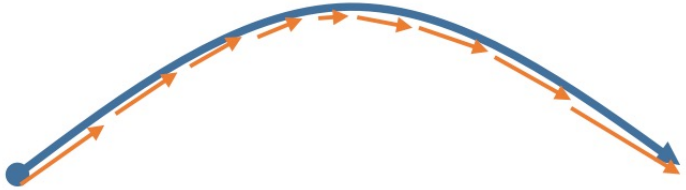
Beim Wurf ist die horizontale Geschwindigkeit konstant -> c) und b) falsch.
Die einzige Beschleunigung die wirkt ist die Erdbeschleunigung nach unten. -> a) ist richtig
d) zeigt das Geschwindigkeitsprofil!

Ich werfe einen Stein in den See. Welche Skizze zeigt die Beschleunigung des Steines über die Flugbahn hinweg?

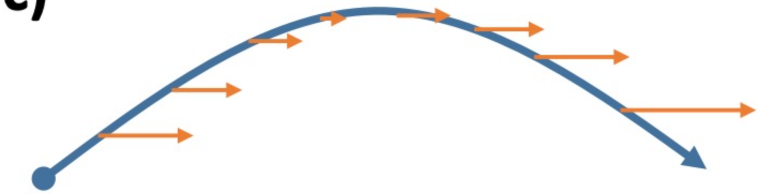
a)



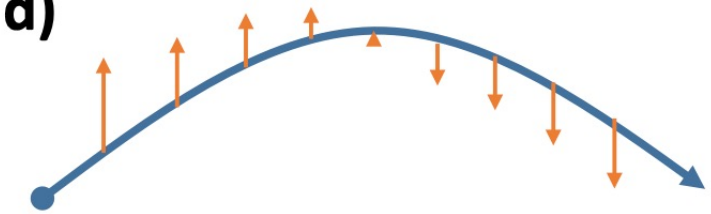
b)



c)



d)



Verständnisfrage: Kanone aus Mittelalter

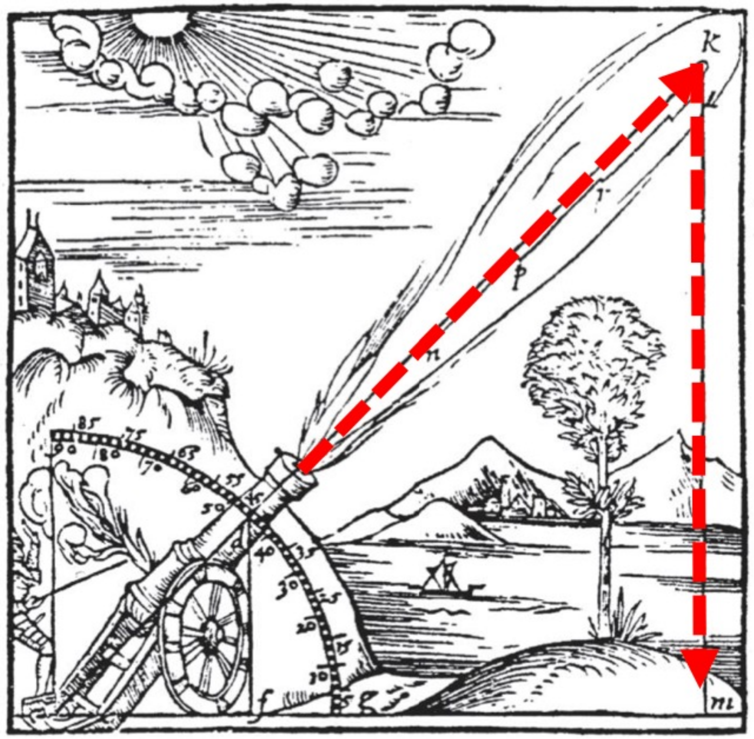
Hier ist ein Bild aus dem Jahre 1561. Damals dachten Ingenieure eine Kanonkugel würde so fliegen.
Was ist falsch an dieser Theorie? Vernachlässige Luftwiderstand.

a) Die Kugel fliegt am Anfang fast linear.

b) Die Kugel scheint ihre Vertikalgeschwindigkeit zu ändern.

c) Die Kugel scheint ihre Horizontalgeschwindigkeit zu ändern.

d) Die Kugel müsste genauso linear fallen, wie sie gestiegen ist, da die Flugbahn symmetrisch ist.



Verständnisfrage: Kanone

a) Das könnte scheinbar sein, wenn v_0 sehr gross ist.
b) Das macht die Kugel eh (sie muss ja steigen und dann fallen)
c) Richtig: Die Horizontalgeschw. Bleibt bei einem Wurf konstant (ohne Luftwiderstand)
d) Es stimmt, dass die Flugbahn symmetrisch ist, aber nicht linear, sondern parabolisch!

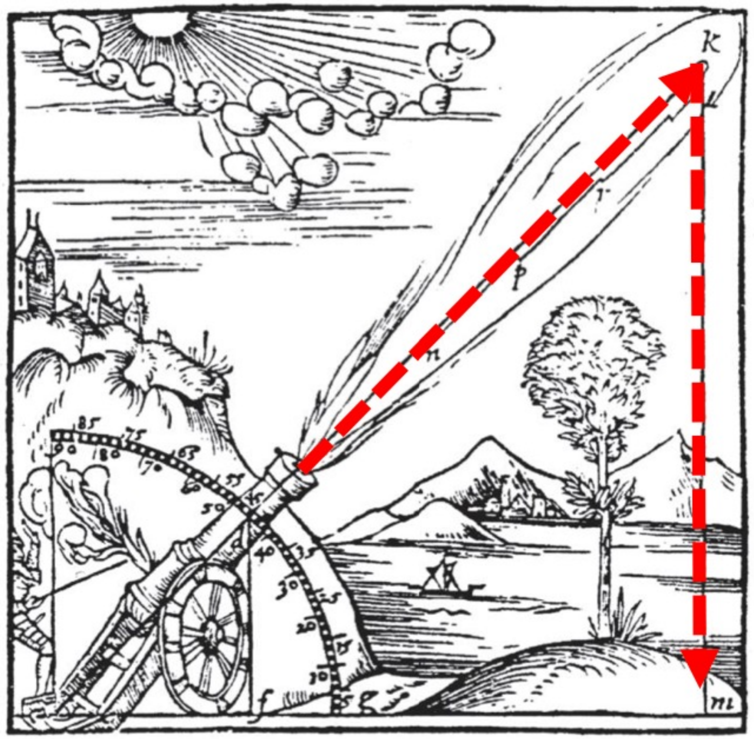
Hier ist ein Bild aus dem Jahre 1561. Damals dachten Ingenieure eine Kanonkugel würde so fliegen.
Was ist falsch an dieser Theorie? Vernachlässige Luftwiderstand.

a) Die Kugel fliegt am Anfang fast linear.

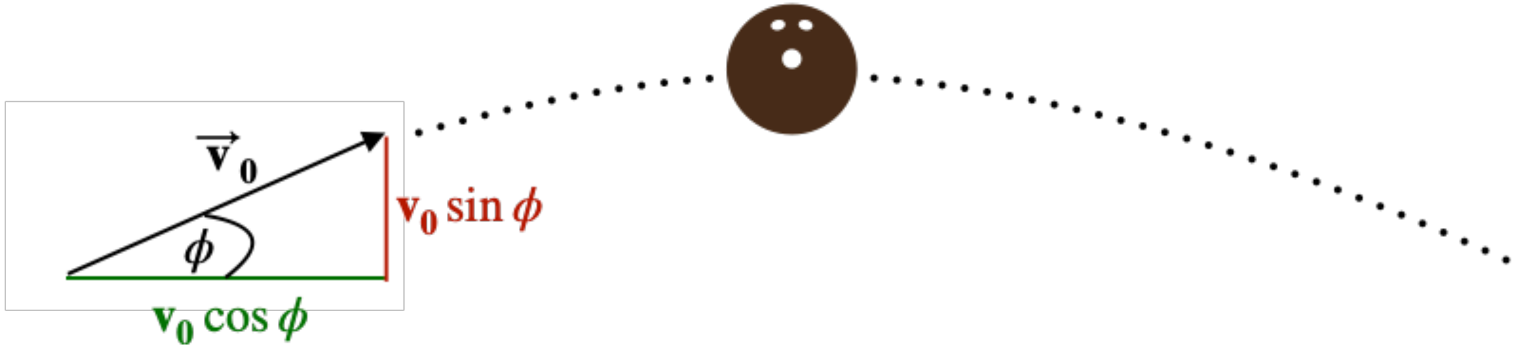
b) Die Kugel scheint ihre Vertikalgeschwindigkeit zu ändern.

c) Die Kugel scheint ihre Horizontalgeschwindigkeit zu ändern.

d) Die Kugel müsste genauso linear fallen, wie sie gestiegen ist, da die Flugbahn symmetrisch ist.



Aufgabe: (Schlechter) Bowling Wurf

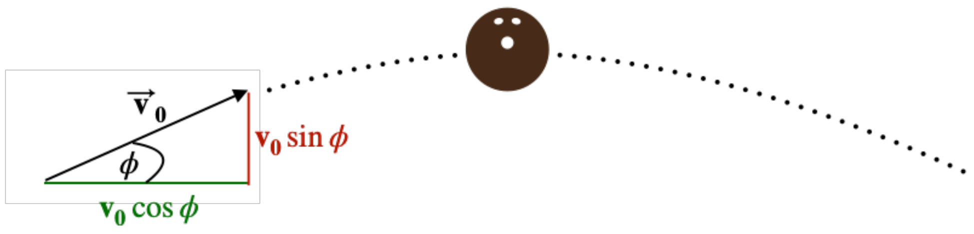


Ein Bowling-Spieler wirft die Kugel mit einer Anfangsgeschwindigkeit von v_0 = 10 m/s.

Wie weit fliegt die Kugel, wenn der Abwurfwinkel $\phi = 45°$ beträgt?

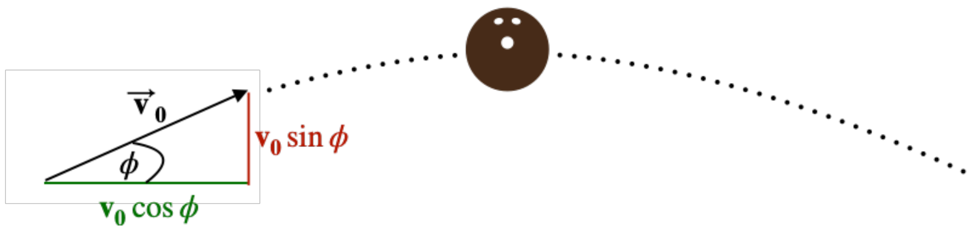
Annahme: Die Kugel wird direkt über dem Boden losgelassen.

Lösungsweg: Bowling Wurf



	Horizontale Bewegung	Vertikaler Wurf
Anfangsbedingungen:	$x_0 = ??$ $v_x = ??$	$y_0 = ??$ $v_y = ??$
Konstante Beschleunigung:	$a_x = ??$	$a_y = ??$
Zweifache Integration:	$x(t) = ??$	$y(t) = ??$

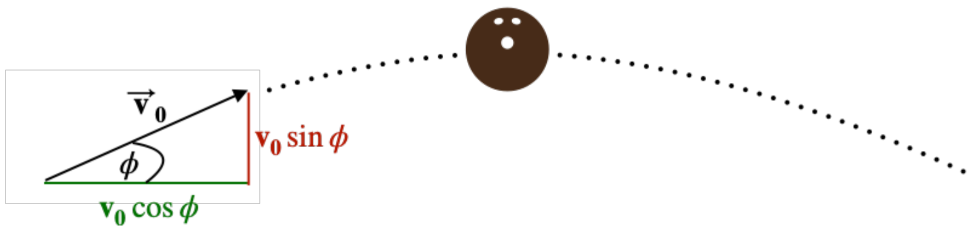
Lösung: Bowling Wurf



	Horizontale Bewegung	**Vertikaler Wurf**
Anfangsbedingungen:	$x_0 = 0$ $v_x = v_0 \cos\phi = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$	$y_0 = 0$ $v_y = v_0 \sin\phi = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$
Konstante Beschleunigung:	$a_x = 0$	$a_y = -g$
Zweifache Integration:	$x(t) = v_0 \cos\phi \cdot t$	$y(t) = v_0 \sin\phi \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2$

Lösung: Bowling Wurf

$$x(t) = v_0 \cos\phi \cdot t \qquad y(t) = v_0 \sin\phi \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$



Erhalte Ende des Wurfes aus y-Komponente:

$$y(t_{end}) = 0 \longrightarrow v_0 \sin\phi \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$t_0 = 0$$

$$t_{end} = 2\frac{v_0}{g} \sin\phi$$

Erhalte Wurfweite durch Einsetzen in x(t)

$$x_{max} = v_0 \cos\phi \cdot t_{end} = 2\frac{v_o^2}{g} \sin\phi \cos\phi = \frac{v_0^2}{g} = 10 \text{ m}$$

Kreis-
bewegungen

Lernziele

- Kreisförmige Bewegungen mit kinematischen Variablen beschreiben
- Zusammenhang zwischen linearen Bewegungen und kreisförmige Bewegungen verstehen

Kreisbewegungen

Befindet sich eine Masse auf einer Kreisbahn, so wirkt auf die Masse immer eine Beschleunigung, die Richtung Kreismitte zeigt.

Bogenmaß für Winkel

$$360^{\circ} \mathrel{\widehat{=}} 2\pi \Longleftrightarrow 3^{\circ} \mathrel{\widehat{=}} \frac{3^{o}}{360^{o}} \cdot 2\pi$$

Länge Kreissegment:

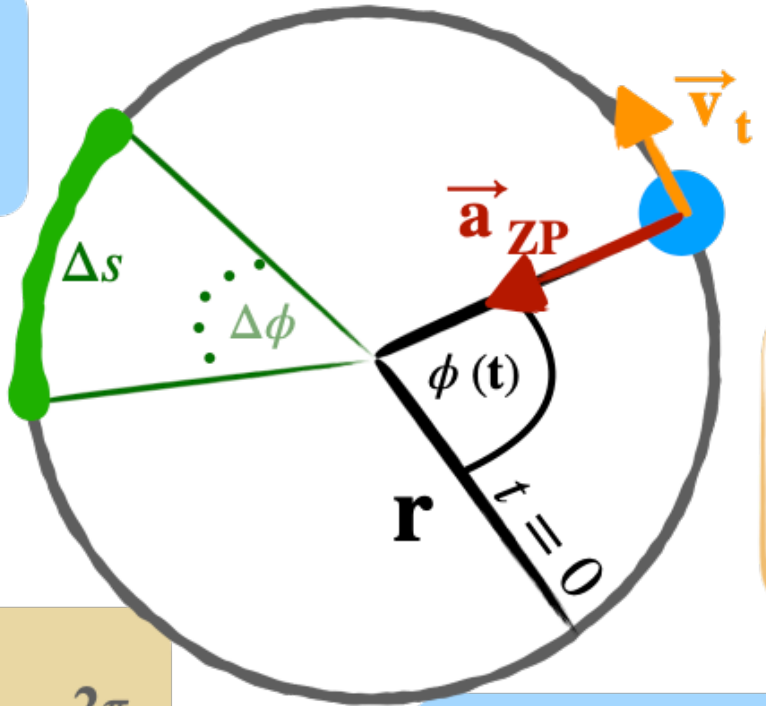
$$\Delta s = r \cdot \Delta\phi$$

Winkelgeschwindigkeit

Wieviel Winkel pro Zeit?

(volle Umdrehung nach T)

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$



Winkel, der nach Zeit t überstrichen wurde: $\phi(\mathrm{t}) = \omega \mathrm{t}$ [für $\omega = const.$]

Tangentialgeschwindigkeit: $|\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{t}}| = \omega \mathrm{r}$

Zentripetalbeschleunigung: $|\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{ZP}}| = \omega^2 \mathrm{r} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{t}}^2}{\mathrm{r}}$

(hält Masse auf Kreisbahn)

übrigens:

Beträge von v_t und a_{ZP} lassen sich durch (zweifaches) Ableiten des Positionsvektors herleiten

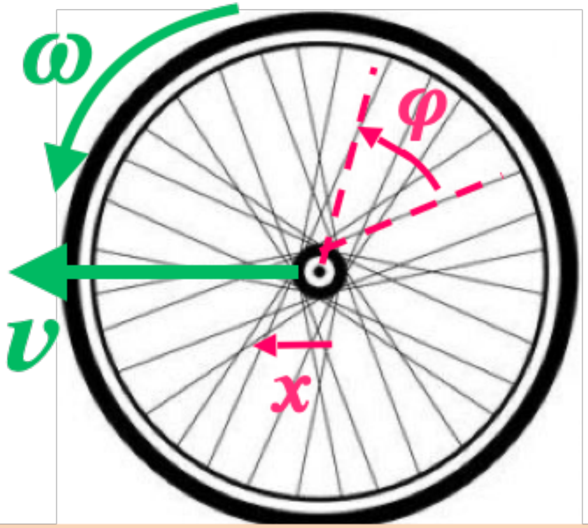
Analogie: Translation und Rotation

Lineare Bewegung

$$x = vt$$

$[v = \text{const.}]$

$$v = \frac{dx}{dt}$$



Kreisbewegung

$$\varphi = \omega t$$

$[\omega = \text{const.}]$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$v = v_0 + at$$

Lineare Bewegung

$[a = \text{const.}]$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$[\alpha = \text{const.}]$

Kreisbewegung

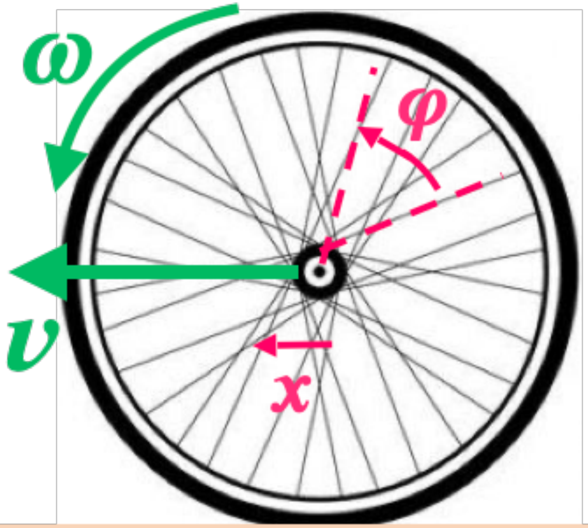
Analogie: Translation und Rotation

Lineare Bewegung

$$x = vt$$

$[\mathrm{v} = \mathrm{const.}]$

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$



Kreisbewegung

$$\varphi = \omega t$$

$[\omega = \mathrm{const.}]$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + at$$

Lineare Bewegung

$[\mathrm{a} = \mathrm{const.}]$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$[\alpha = \mathrm{const.}]$

Kreisbewegung

Verständnisfrage: Erdrotation

Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde?

a) $\omega = \frac{2\,\pi}{24\,h}$

b) $\omega = \frac{1}{24\,h}$

c) $\omega = \frac{2\,\pi\,r_e}{24\,h}$

d) $\omega = 462$ rad/s

Verständnisfrage: Erdrotation

Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde?

$a)\quad \omega = \dfrac{2\,\pi}{24\,h}$

$b)\quad \omega = \dfrac{1}{24\,h}$

$c)\quad \omega = \dfrac{2\,\pi\,r_e}{24\,h}$

$d)\quad \omega = 462$ rad/s

$$\boxed{a)\quad \omega = \frac{2\,\pi}{T}}$$

Verständnisfrage: Uhrenblätter

Die St. Peterskirch in Zürich hat das grösste Ziffeblatt Europas. Wenn ich auf meine Armbanduhr schaue und die Zeiger vergleiche, was fällt auf?

a) Die Zeiger der St. Peterskirch haben eine grössere Winkelgeschwindigkeit als die der Armbanduhr.

b) Die Winkelgeschwindigkeit der Zeiger beider Uhren ist gleich.

c) Die Zeiger der Armbanduhr haben eine grössere Tangentialgeschwindigkeit als die der St. Peterskirche.

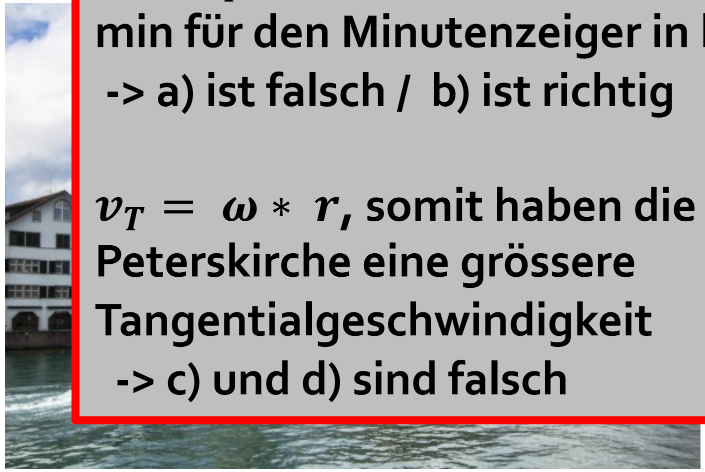
d) Die Tangentialgeschwindigkeit der Zeiger beider Uhren ist gleich.

Verständnisfrage: Uhrenblätter

$\omega = \frac{2\,\pi}{T}$ und T = 12 h für den Studentzeiger und 60 min für den Minutenzeiger in beiden Fällen
-> a) ist falsch / b) ist richtig

$v_T = \omega * r$, somit haben die Zeiger der Peterskirche eine grössere Tangentialgeschwindigkeit
-> c) und d) sind falsch

Die St. Peterskirch in Zürich hat das grösste Ziffeblatt Europas. Wenn ich auf meine Armbanduhr schaue und die Zeiger vergleiche, was fällt auf?



a) Die Zeiger der St. Peterskirch haben eine grössere Winkelgeschwindigkeit als die der Armbanduhr.

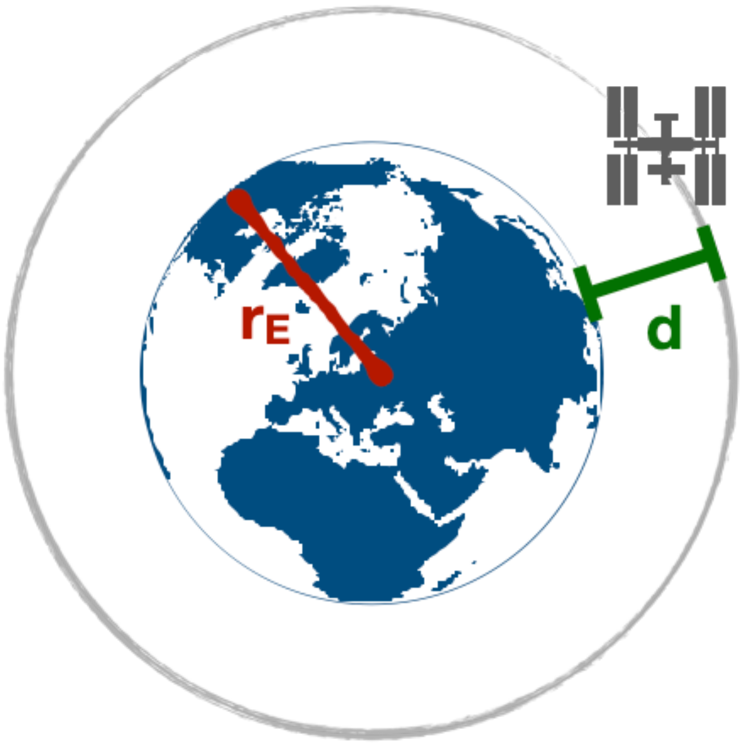
b) Die Winkelgeschwindigkeit der Zeiger beider Uhren ist gleich.

c) Die Zeiger der Armbanduhr haben eine grössere Tangentialgeschwindigkeit als die der St. Peterskirche.

d) Die Tangentialgeschwindigkeit der Zeiger beider Uhren ist gleich.

Aufgabe: Raumstation im Orbit

Die internationale Raumstation (ISS) umkreist die Erde (r_e = 6378 km) in einer Höhe von etwa d = 410 km. Für eine gesamte Umrundung benötigt die Station gerade einmal T ~ 93 min.

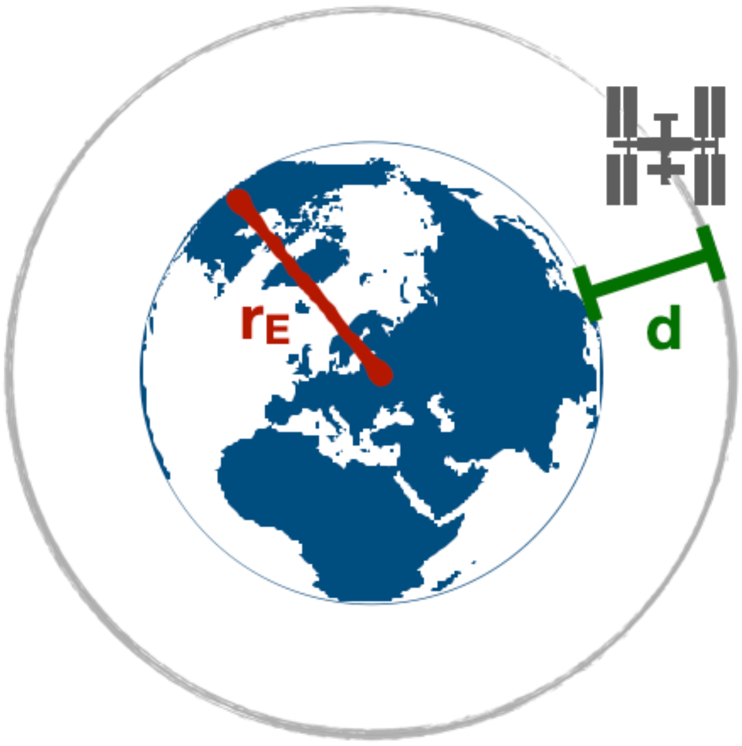


Fragen:

Wie gross ist die Geschwindigkeit, mit der die Station die Erde umkreist?

Welche Beschleunigung wirkt und wie groß ist diese?

Lösungsweg: Raumstation im Orbit



gegeben: **Dauer für einen Umlauf:** $T = 93 \text{ min} = 5580 \text{ s}$

Radius der Kreisbahn

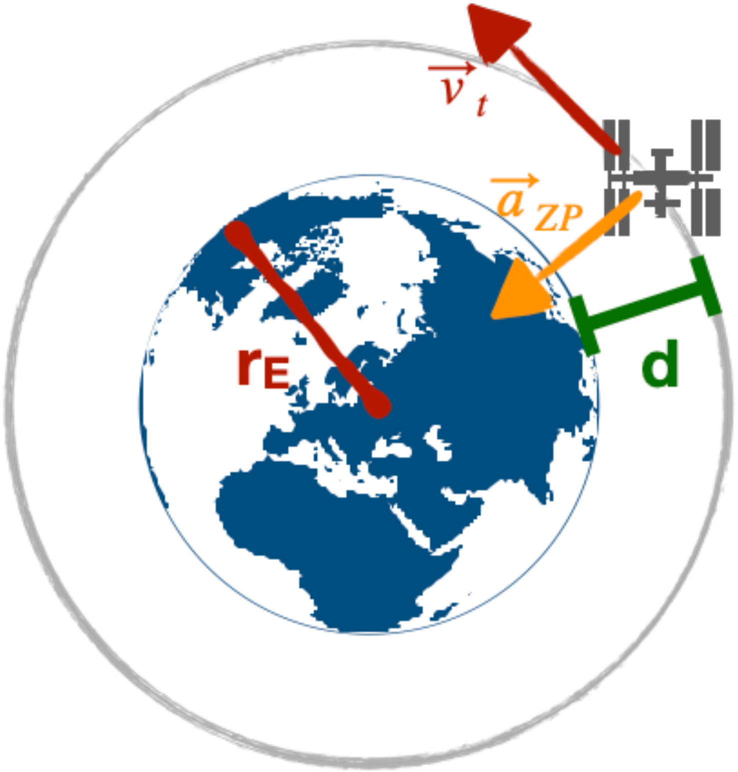
$$r = r_E + d = 6378 \text{ km} + 410 \text{ km} = 6788 \text{ km}$$

1. Berechne Winkelgeschwindigkeit:

2. Erhalte daraus Bahngeschwindigkeit

3. Beschleunigung:

Lösung: Raumstation im Orbit



gegeben: **Dauer für einen Umlauf:** $T = 93 \text{ min} = 5580 \text{ s}$

Radius der Kreisbahn

$$r = r_E + d = 6378 \text{ km} + 410 \text{ km} = 6788 \text{ km}$$

1. Berechne Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1.13 \cdot 10^{-3} \ \frac{1}{s}$$

2. Erhalte daraus Bahngeschwindigkeit

$$v_t = \omega r = 7.6 \ \frac{\text{km}}{s}$$

3. Beschleunigung:

Es wirkt eine Beschleunigung in Richtung Erdmittelpunkt. Diese hat den Betrag:

$$a_{ZP} = \omega^2 r = 8.6 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Das entspricht der Erdbeschleunigung in 410 km Höhe!