Engaging Physics Tutoring

Physik I

Lektion 9

Trägheitsmoment
Rotation starrer Körper

Themen der Lektion

Trägheitsmoment

Definition

Berechnung

Bedeutung

Rotation starrer Körper

quantitativ und qualitativ

Das Trägheitsmoment rotierender Körper

Definition:

Diskrete Massen

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Kontinuierliche Form

$$J = \int r_\perp^2 \, dm = \int r_\perp^2 \, \rho \, dV$$

"Wie weit ist die Masse des Körpers weg von der Drehachse?"

Zusammenhang zu Rotationsenergie, Drehimpuls und Moment

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 \qquad \vec{M} = J \vec{\alpha}$$

$$E_{rot} = \frac{L^2}{2J} \qquad \vec{L} = J \vec{\omega}$$

Analogien bei geradliniger Bewegung

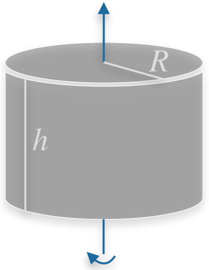
$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \vec{F} = m \vec{a}$$

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \qquad \vec{p} = m \vec{v}$$

Ausgewählte Trägheitsmomente

Ausgewählte Trägheitsmomente

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{r}_\perp^2 \, \mathrm{d}\mathbf{m} = \int \mathbf{r}_\perp^2 \, \rho \, \mathrm{d}\mathbf{V}$$



Zylinder

$\mathrm{d}V =$

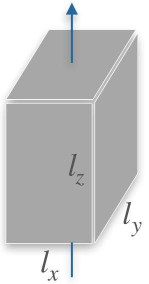
Beispiel Vollzylinder:

$J = \quad \ldots$ Rechnung?

$\rho = \dfrac{m}{h \pi R^2}$ $\quad J = \dfrac{1}{2} m R^2$

Quader $\quad \mathrm{d}V = \quad\quad r_\perp =$

Beispiel:

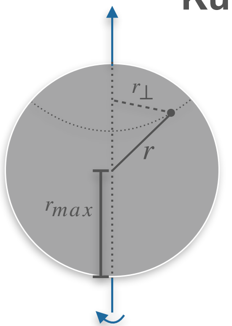


$J = \quad \ldots$ Rechnung?

$\rho = \dfrac{m}{l_x l_y l_z}$ $\quad J = \dfrac{1}{12} m \left(l_x^2 + l_y^2\right)$

Kugel

$\mathrm{d}V = \quad\quad r_\perp =$



Beispiel Vollkugel:

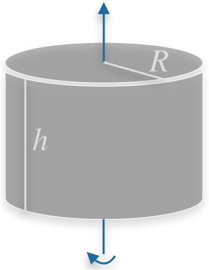
$J = \quad \ldots$ Rechnung?

$\rho = \dfrac{m}{\frac{4}{3} \pi R^3}$ $\quad J = \dfrac{2}{5} m r_{max}^2$

Ausgewählte Trägheitsmomente

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{r}_\perp^2 \, \mathbf{dm} = \int \mathbf{r}_\perp^2 \, \rho \, \mathbf{dV}$$

Zylinder



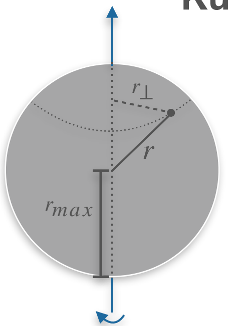
$$\mathrm{d}V = r_\perp \mathrm{d}r_\perp \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$$

Beispiel Vollzylinder:

$$J = \rho \int_0^R r_\perp^2 \, r_\perp \mathrm{d}r_\perp \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z$$

$$\rho = \frac{m}{h\pi R^2} \qquad J = \frac{1}{2} m R^2$$

Kugel



$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \; \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \qquad r_\perp = r \sin\theta$$

Beispiel Vollkugel:

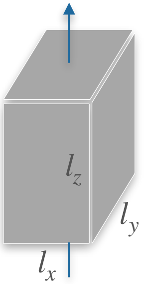
$$J = \rho \int_0^{r_{max}} r^2 \; r^2 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} d\theta \sin^2\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad J = \frac{2}{5} m r_{max}^2$$

Quader

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \qquad r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Beispiel:



$$J = \rho \int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}} \int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}} \int_{\frac{l_z}{2}}^{\frac{l_z}{2}} \left(x^2 + y^2\right) \; \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$\rho = \frac{m}{l_x l_y l_z} \qquad J = \frac{1}{12} m \left(l_x^2 + l_y^2\right)$$

Frage zum Trägheitsmoment

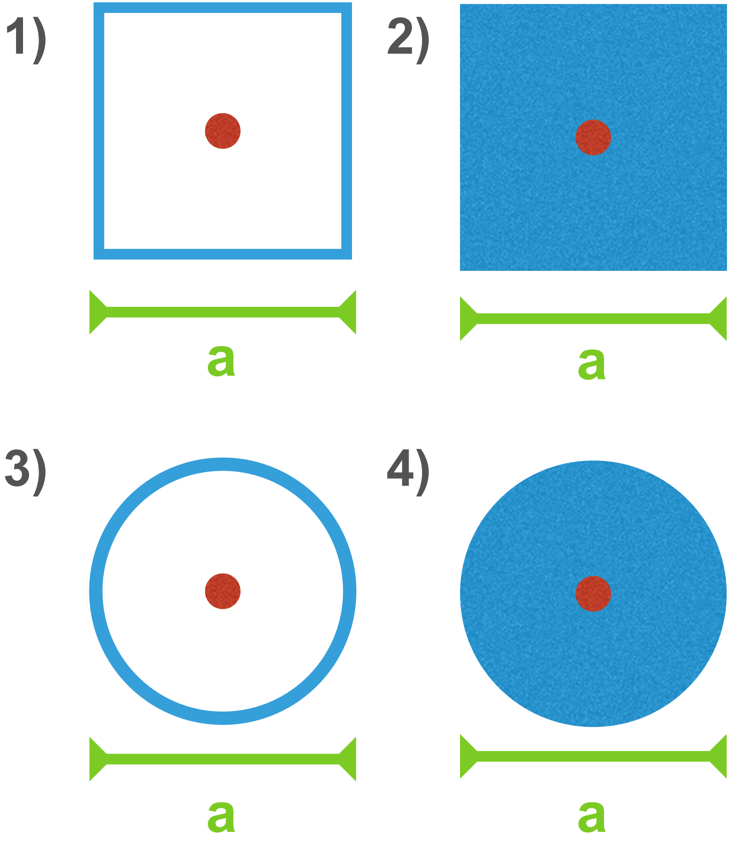
**Alle Körper haben die gleiche Masse.
Welche Aussage stimmt dann?**

A) $J_1 > J_2 > J_3 > J_4$

B) $J_1 > J_3 > J_2 > J_4$

C) $J_3 > J_4 > J_1 > J_2$

C) $J_4 > J_2 > J_3 > J_1$



Würfel- und Zylinderquerschnitte

Frage zum Trägheitsmoment

**Alle Körper haben die gleiche Masse.
Welche Aussage stimmt dann?**

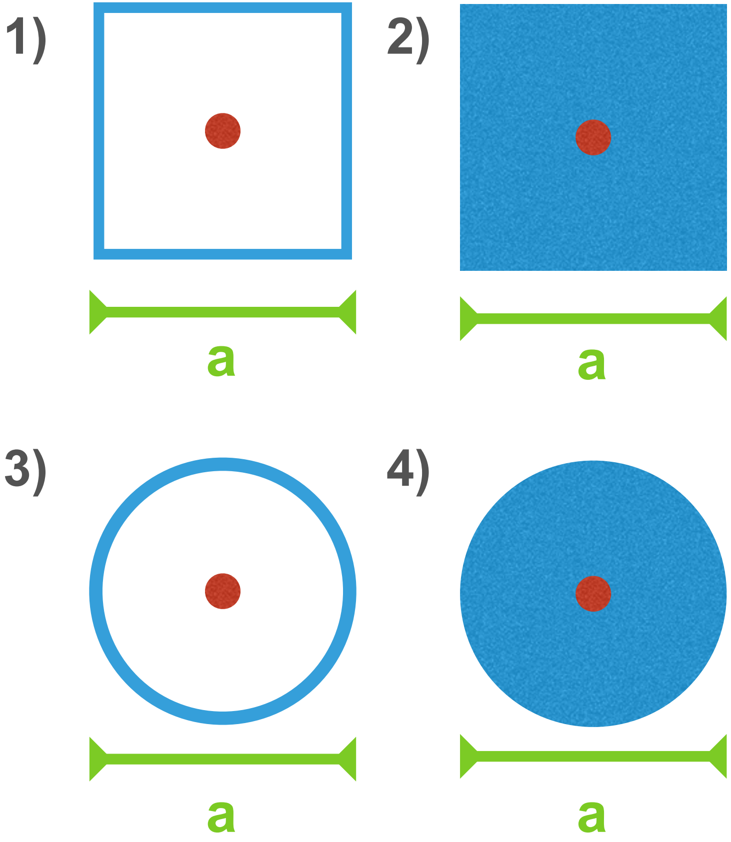
A) $J_1 > J_2 > J_3 > J_4$

$J_1 > J_3 > J_2 > J_4$

C) $J_3 > J_4 > J_1 > J_2$

C) $J_4 > J_2 > J_3 > J_1$

**Achtung:
Wäre stattdessen die Dichte der Körper gleich, wären die Trägheitsmomente der Hohlkörper kleiner!**



Würfel- und Zylinderquerschnitte

Kind auf Drehscheibe

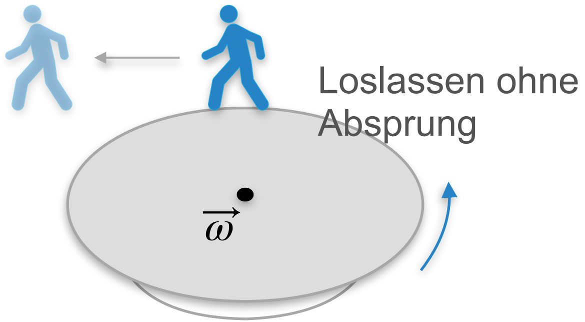
Trägheitsmomente und Drehimpulserhaltung

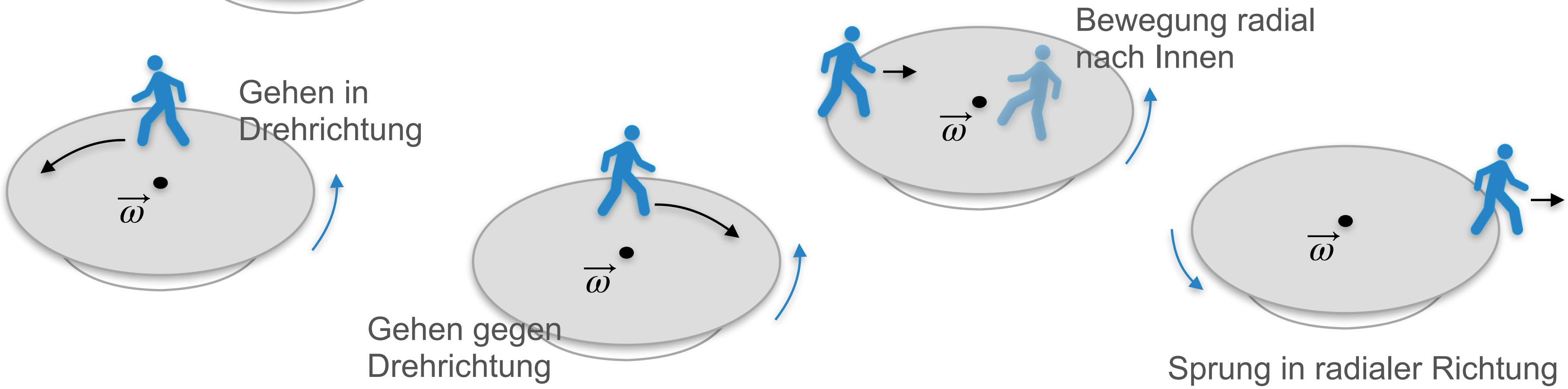
Kind auf Karussell

Ein Kind macht Experimente auf einer Drehscheibe. Zu Beginn steht das Kind ruhig auf der Scheibe, bevor es mit den abgebildeten Bewegungen beginnt.

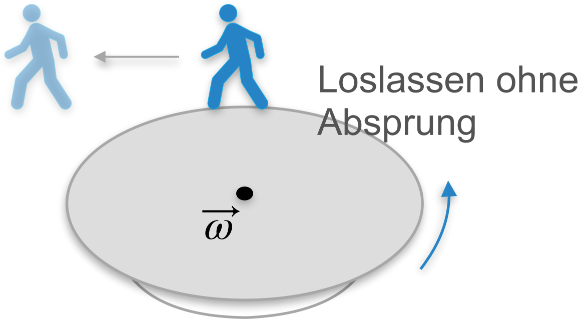
Wie verändert sich die Winkelgeschwindigkeit Der Scheibe mit der abgebildeten Bewegung?

Wie verändern sich die einzelnen Drehimpulse der Scheibe und des Kindes jeweils?

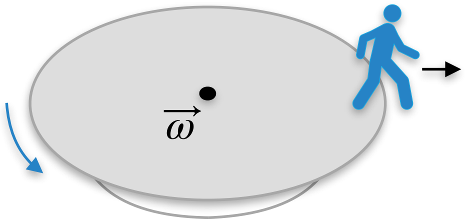




Kind auf Karussell - Lösung I



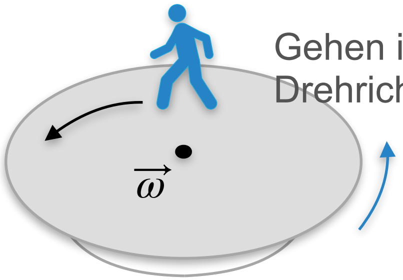
$\vec{\omega}_{\text{Scheibe}}$ bleibt gleich, $\vec{L}_{\text{S}} = J_{\text{S}}\vec{\omega}_{\text{Scheibe}}$ bleibt gleich und $\vec{L}_{\text{Kind}}$ bleibt auch gleich (klar wegen $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_S + \vec{L}_K = \text{konst}$).



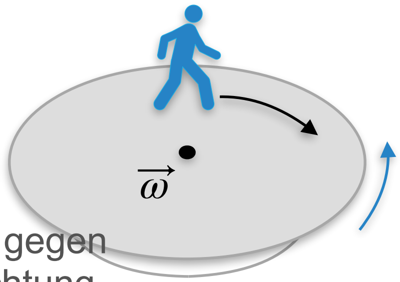
Sprung in radialer Richtung

Da die Kraft beim Sprung nur in radialer Richtung wirkt, ändert sich weder der Drehimpuls $\vec{L}_S$ der Scheibe, noch der Drehimpuls $\vec{L}_K$ des Kindes.
$\vec{\omega}_S$ bleibt ebenfalls gleich!

Kind auf Karussell - Lösung II



Die einzelnen Trägheitsmomente J_S und J_K bleiben unverändert. Die Winkelgeschwindigkeit des Kindes nimmt zu, also wächst sein Drehimpuls $\overrightarrow{L_K} = J_K \vec{\omega}_K$.
Folglich muss wegen $\vec{L}_{\mathrm{tot}} = \mathrm{konst}$ der Drehimpuls der Scheibe $\vec{L}_S$ abnehmen. Dies stimmt überein damit, dass das Kind die Scheibe mit einem Drehmoment abbremst, um sich zu beschleunigen.

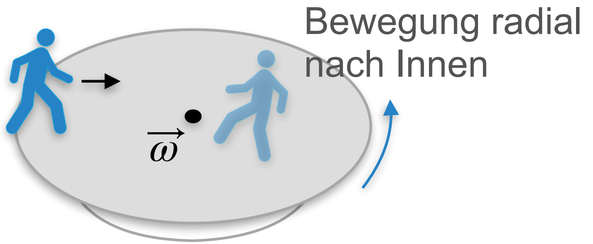


Analog zu oben:

$\vec{L}_S \Uparrow \qquad \vec{\omega}_S \Uparrow$

$\vec{L}_K \Downarrow \qquad \vec{\omega}_K \Downarrow$

Kind auf Karussell - Lösung III



Das Trägheitsmoment J_K des Kinds um das Drehzentrum wird kleiner.
Das Trägheitsmoment der Scheibe J_S bleibt konstant.
Folglich wird das gemeinsame Trägheitsmoment $J = J_S + J_K$ kleiner.

Der Gesamtdrehimpuls bleibt erhalten, da kein äusseres Drehmoment wirkt. Wegen $\vec{L}_{\mathrm{tot}} = J\vec{\omega} = \mathrm{konst}$ wird also die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit ω zunehmen.

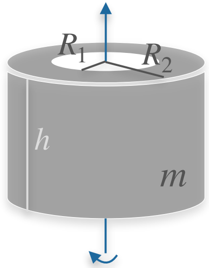
Folglich nimmt der Drehimpuls der Scheibe $\vec{L}_S = J_S\vec{\omega}$ zu. Gleichzeitig wird der Drehimpuls des Kindes ums Drehzentrum $\vec{L}_K = J_K\vec{\omega}$ abnehmen!

Anschauliche Erklärung: Beim Gang nach Innen bewegt sich das Kind zunächst schneller als der Boden, den es betritt. Durch die Haftung des Fusses auf der Scheibe bremst das Kind ab und gibt den Drehimpuls an die Scheibe ab.

Berechnen von Zylinder-Trägheitsmomenten

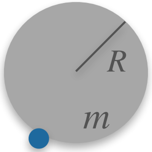
Explizite Rechnung: Trägheitsmomente von Zylindern

Hohlzylinder, Trägheitsmoment für Drehung um Achse im Zentrum:



$$J = \rho \int_V r_\perp^2 \, \mathrm{d}V =$$

Vollzylinder, Trägheitsmoment für Drehung um Achse am Rand:

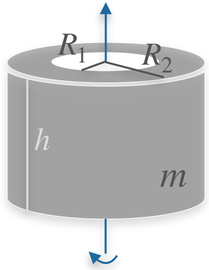


Vollzylinder um Mittelachse:

Satz von Steiner:

Explizite Rechnung: Trägheitsmomente von Zylindern

Hohlzylinder, Trägheitsmoment für Drehung um Achse im Zentrum:

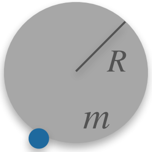


$$J = \rho \int_V r_\perp^2 \, \mathrm{d}V = \rho \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot r \; \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z = \rho \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} 2\pi h = \frac{m}{\pi h \left(R_2^2 - R_1^2\right)} \frac{2\pi h}{4} \left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

$$\rho = \frac{m}{\pi h \left(R_2^2 - R_1^2\right)}$$

$$J = \frac{1}{2} m \left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

Vollzylinder, Trägheitsmoment für Drehung um Achse am Rand:



Vollzylinder um Mittelachse: $J = \frac{1}{2} m R^2$

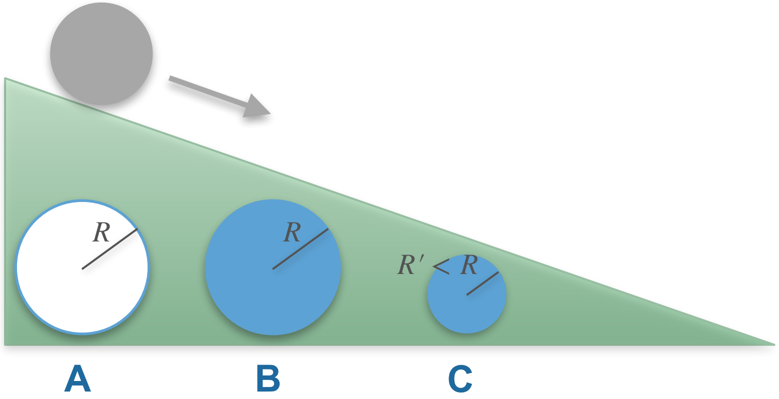
Satz von Steiner: $J' = J + mR^2 = \frac{3}{2} m R^2$

Zylinder auf schiefer Ebene

MC-Frage

Schiefe Ebene: Rennen der Zylinder

Die drei verschiedenen Zylinder rechts rollen gleichzeitig eine schiefe Ebene herunter.
A ist ein Zylindermantel (innen hohl), B und C sind Vollzylinder.



Welche Aussage stimmt für die Zeiten t_i nach welchen die Zylinder unten ankommen?

1) $t_A > t_B > t_C$

2) $t_A = t_B > t_C$

3) $t_A > t_B = t_C$

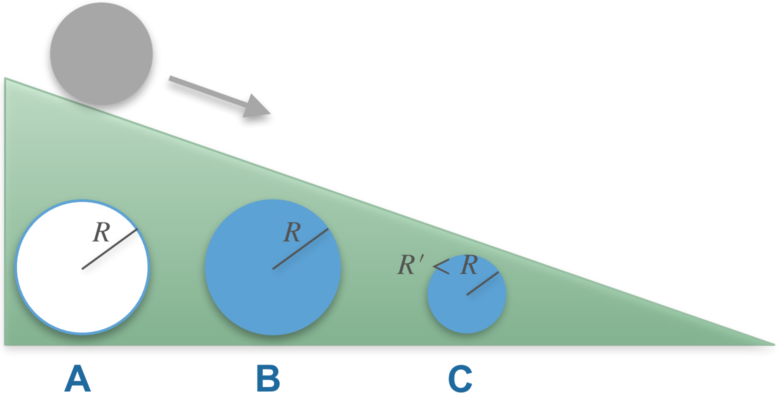
4) $t_A = t_B = t_C$

5) $t_C > t_B = t_A$

6) Mehr Informationen sind nötig.

Schiefe Ebene: Rennen der Zylinder

Die drei verschiedenen Zylinder rechts rollen gleichzeitig eine schiefe Ebene herunter.
A ist ein Zylindermantel (innen hohl), B und C sind Vollzylinder.



Welche Aussage stimmt für die Zeiten t_i nach welchen die Zylinder unten ankommen?

1) $t_A > t_B > t_C$

2) $t_A = t_B > t_C$

3) $t_A > t_B = t_C$

4) $t_A = t_B = t_C$

5) $t_C > t_B = t_A$

6) Mehr Informationen sind nötig.

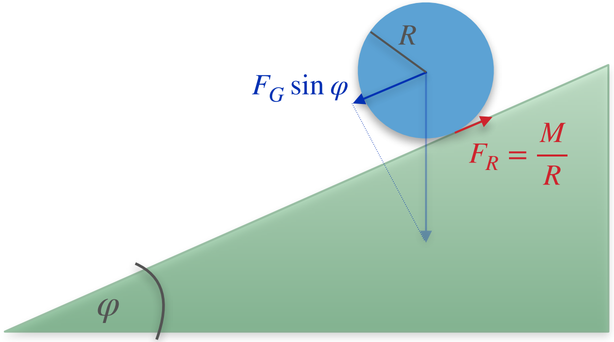
Die Beschleunigung des Schwerpunkts hängt weder von der Masse ab noch vom Radius. Jedoch muss der Hohlzylinder relativ mehr Energie in seine Rotation investieren.

Rechnung folgt!

Zylinder auf schiefer Ebene

Rechnung

Schiefe Ebene: Rechnung zur Beschleunigung



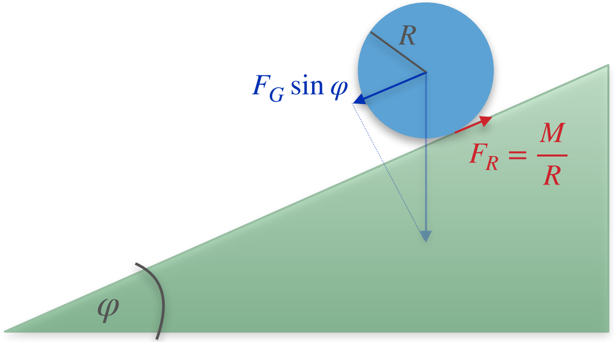
Wie sieht die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt eines Zylinders aus, der über eine Rampe abrollt? Wie gross ist die Beschleunigung entlang der Schräge?

Tipp: Der Rollwiderstand kann wie eine Reibungskraft in die Bewegungsgleichung integriert werden. Der Beitrag zur linearen Beschleunigung kann dabei mit dem Drehmoment ausgedrückt werden.

$$m\ddot{x} =$$

$$\ddot{x} =$$

Schiefe Ebene: Rechnung zur Beschleunigung



Wie sieht die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt eines Zylinders aus, der über eine Rampe abrollt? Wie gross ist die Beschleunigung entlang der Schräge?

Tipp: Der Rollwiderstand kann wie eine Reibungskraft in die Bewegungsgleichung integriert werden. Der Beitrag zur linearen Beschleunigung kann dabei mit dem Drehmoment ausgedrückt werden.

$$m\ddot{x} = mg\sin\varphi - F_r$$

$$\alpha = \ddot{x}/R$$

$$m\ddot{x} = mg\sin\varphi - \frac{M}{R} = mg\sin\varphi - \frac{J\alpha}{R} = mg\sin\varphi - \frac{J\ddot{x}}{R^2}$$

$$M = \dot{L} = J\alpha$$

$$\ddot{x} = \frac{mg\sin\varphi}{m + \frac{J}{R^2}}$$

Vollzylinder: $J = \frac{1}{2}mR^2$

$$\rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\varphi$$

Zylindermantel: $J = mR^2$

$$\rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{2}g\sin\varphi$$

Die Beschleunigung hängt nur von der Form, nicht von der Masse oder Grösse der Rolle ab!

Weitere Konzeptfragen

Die folgenden Fragen sind extrahiert von
“Konzeptfragen zur Newtonschen Mechanik und Thermodynamik”
von Rafael Gort

Frage 1

Eine Eiskunstläuferin vollführt eine Piruette. Damit sie sich schneller drehen kann, zieht sie die Arme zum Körper. Wie verändert sich dadurch die Rotationsenergie der Eiskunstläuferin.

1. Sie nimmt zu, weil sie schneller rotiert.
2. Sie nimmt ab, da ihr Trägheitsmoment abnimmt.
3. Sie bleibt gleich.
4. Zu wenig Informationen.

Frage 1

Eine Eiskunstläuferin vollführt eine Piruette. Damit sie sich schneller drehen kann, zieht sie die Arme zum Körper. Wie verändert sich dadurch die Rotationsenergie der Eiskunstläuferin.

1. Sie nimmt zu, weil sie schneller
2. Sie nimmt ab, da ihr Trägheitsm
3. Sie bleibt gleich.
4. Zu wenig Informationen.

Antwort: 1. Die Rotationsenergie nimmt zu.

Man kann die kinetische Energie im Schwerpunkt beschreiben als:

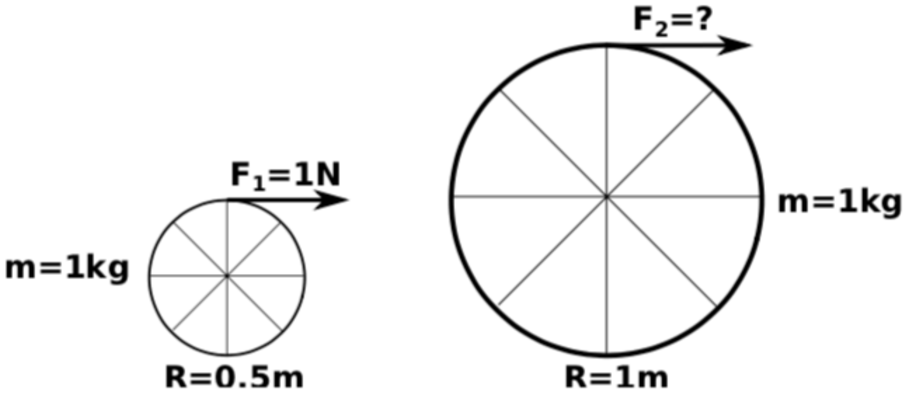
$$T = \frac{1}{2} J_{\mathrm{A}} \boldsymbol{\omega}^2$$

Man kann die obige Formel abändern mit Hilfe von $\mathbf{L} = J_{\mathrm{A}} \boldsymbol{\omega}$:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{L} \boldsymbol{\omega}$$

Da der Drehimpuls erhalten ist, und die Winkelgeschwindigkeit zunimmt, muss die Rotationsenergie zunehmen.

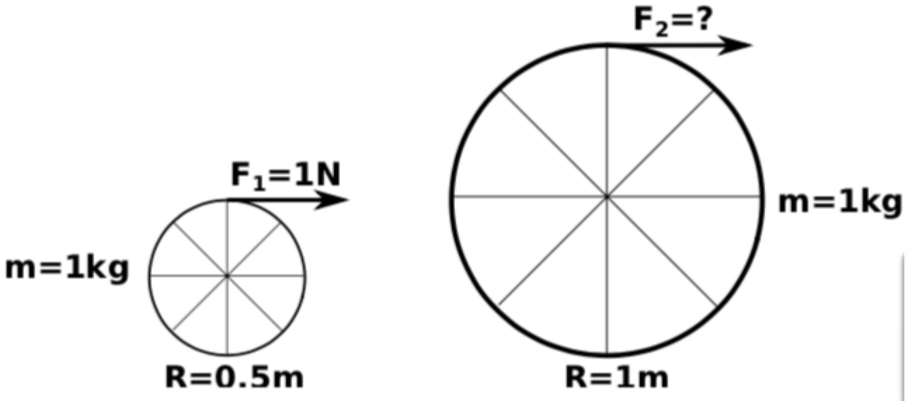
Frage 2



Man hat die zwei gezeigten Räder, welche zu Beginn ruhen. Dann wirkt auf die Räder wie gezeigt eine Kraft in einem gleichen Zeitintervall. Man nehme an die Speichen der Räder seien masselos. Das Drehmoment ist daher $J = mR^2$. Wie gross muss F_2 sein, damit beide Räder die gleiche Winkelgeschwindigkeit erhalten?

1. $0.25N$
2. $0.5N$
3. $1.0N$
4. $2.0N$
5. $4.0N$
6. Zu wenig Informationen.

Frage 2



Man hat die zwei gezeigten Räder, welche zu Beginn ruhen. Dann wirkt auf die Räder wie gezeigt eine Kraft in einem gleichen Zeitintervall. Man nehme an die Speichen der Räder seien masselos. Das Drehmoment ist daher $J = mR^2$. Wie gross muss F_2 sein, damit beide Räder die gleiche Winkelgeschwindigkeit erhalten?

1. $0.25N$
2. $0.5N$
3. $1.0N$
4. $2.0N$
5. $4.0N$

Antwort: 4. $F_2 = 2.0N$

Das Trägheitsmoment des grossen Rades ist vier mal grösser als das des kleineren. Damit die Winkelgeschwindigkeit der Räder gleich gross ist muss der Drehimpuls des grossen Rades zum Schluss also ebenfalls vier mal grösser sein als der des kleineren Rades. Der schlussendliche Drehimpuls wird durch das angreifende Drehmoment verursacht. Dieser ist proportional zur angreifenden Kraft, sowie dem Abstand zum Drehpunkt. F_2 muss also doppelt so gross sein wie F_1.