Engaging Physics Tutoring

Physik I

Lektion 7

Zentralkraft und potentielle Energie
Drehimpuls und Drehmoment
Flächenintegrale

Themen der Lektion

Einführung Drehimpuls und Drehmoment

Zentralkraft und potentielle Energie

Wegintegral

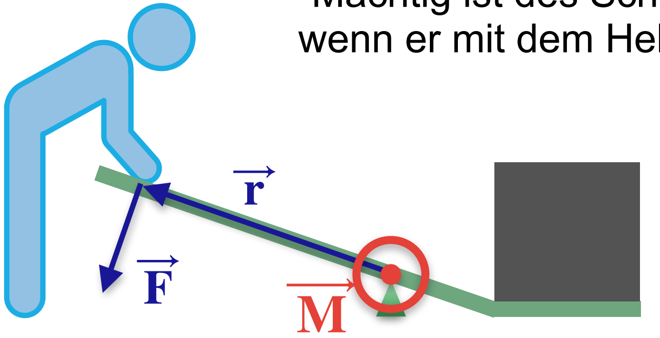
Zentripetalkraft

Flächenintegrale

Übersicht zu Drehmoment und -impuls

Drehmoment und Drehimpuls

"Mächtig ist des Schlossers ~~Kraft~~ Moment,
wenn er mit dem Hebel schafft."



Drehmoment

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m} \cdot (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{a}})$$

$$[M] = \mathrm{Nm}$$

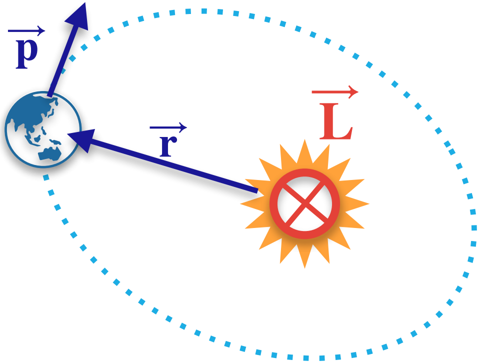
→ **Vektor parallel zur Drehachse**

Drehimpuls

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m} \cdot (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}})$$

$$[L] = \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s}}$$

→ **senkrecht auf $\vec{r}$ und $\vec{v}$**



Zusammenhang:

Drehmoment verursacht
Änderung des Drehimpulses

$$\dot{\vec{\mathbf{L}}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}}{\mathrm{dt}} = \vec{\mathbf{M}}$$

$\vec{M}$ verhält sich zu $\vec{L}$,
wie $\vec{F}$ zu $\vec{p}$: $\dot{\vec{\mathbf{p}}} = \vec{\mathbf{F}}$

Mechanik von Massenpunkten

die zentralen Grössen

$\mathbf{E}$ $\quad \vec{\mathbf{L}}$ $\quad \mathbf{W}$ $\quad \mathbf{P}$ $\quad \vec{\mathbf{M}}$

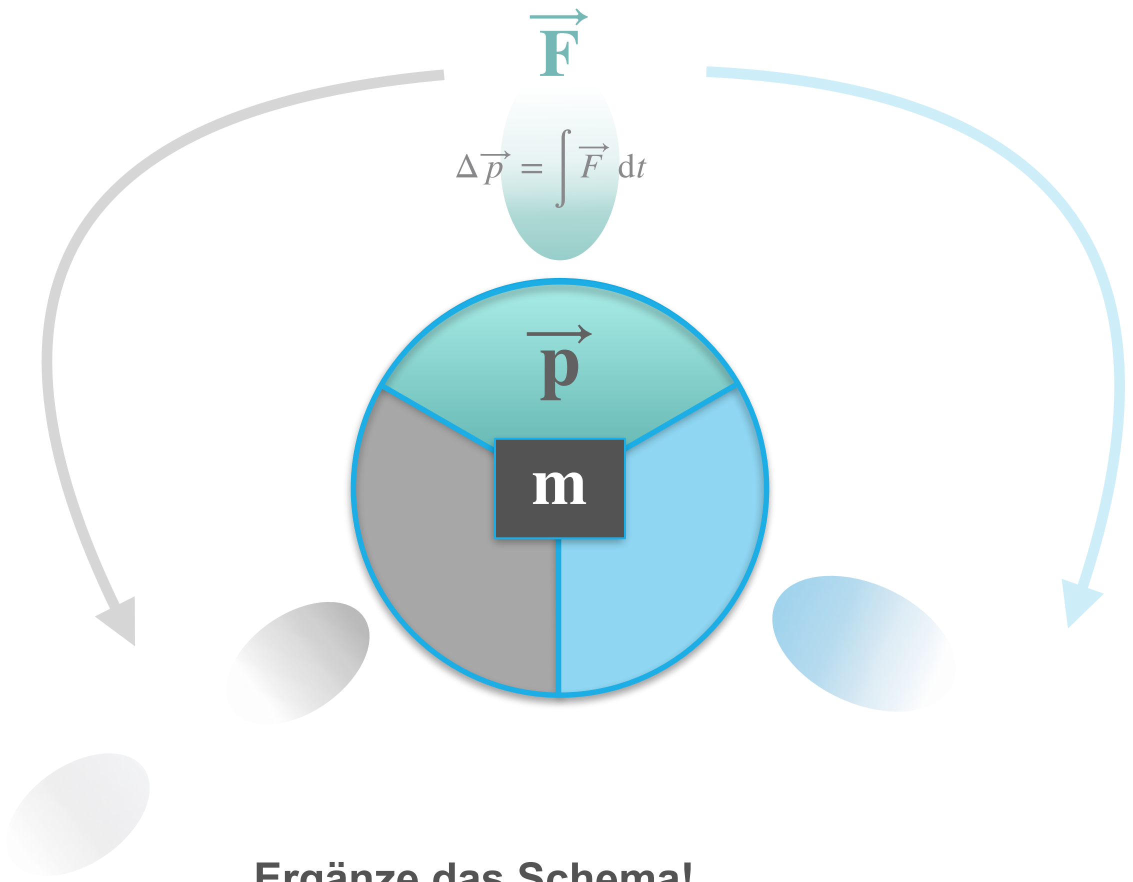
$$\Delta \vec{L} = \int \vec{M}\, \mathrm{d}t$$

$$\Delta E = W$$

$$W = \int P\, \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{W} = \int \vec{\mathbf{F}}\, \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$$

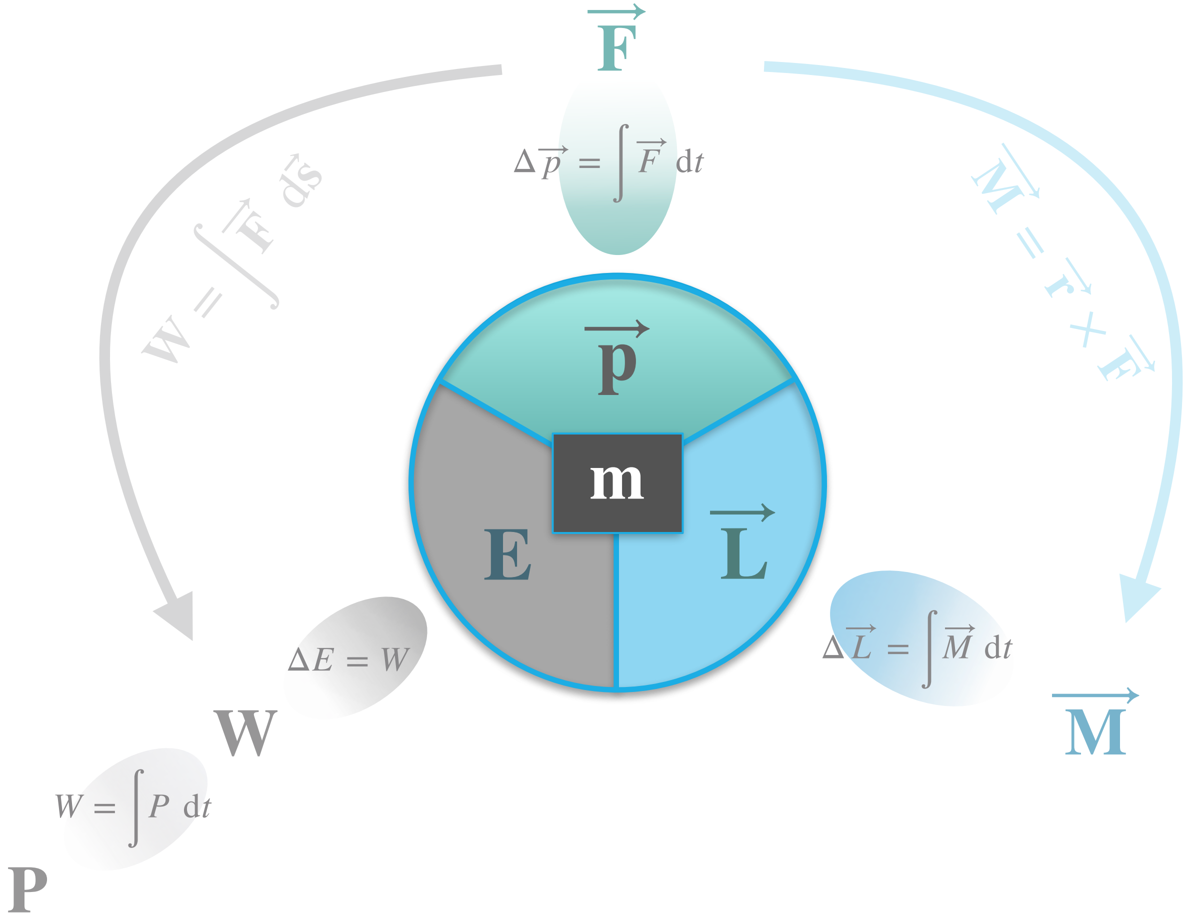
$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$



Ergänze das Schema!

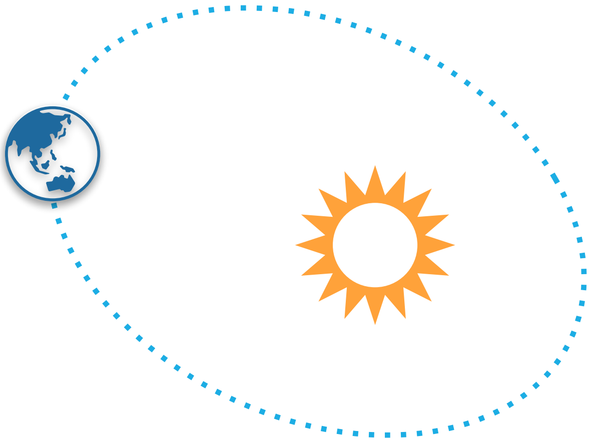
Mechanik von Massenpunkten

die zentralen Grössen



Drehimpuls der Erde um die Sonne

Erde und Sonne



Die Erde kreist einmal im Jahr um die Sonne.

Die Masse der Erde ist $m_E = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg,
die der Sonne $m_S = 1.99 \cdot 10^{30}$kg.

Gravitationskraft: $\left|F_G\right| = \frac{m_S m_E G}{r^2}$

Annahme: Wir nähern die Bewegung als Kreisbewegung.

Fragen:

Wie gross ist der Abstand Sonne-Erde?
Welche Bahngeschwindigkeit hat die Erde?

Wie gross ist der Betrag des Drehimpuls der Erde um die Sonne?

Erde und Sonne

Idee: Zentripetalkraft wird durch Gravitationskraft geliefert.

$$\left|F_G\right| = \left|F_{ZP}\right|$$

$\left|F_{ZP}\right| =$ $\omega =$

Gleichsetzen liefert:

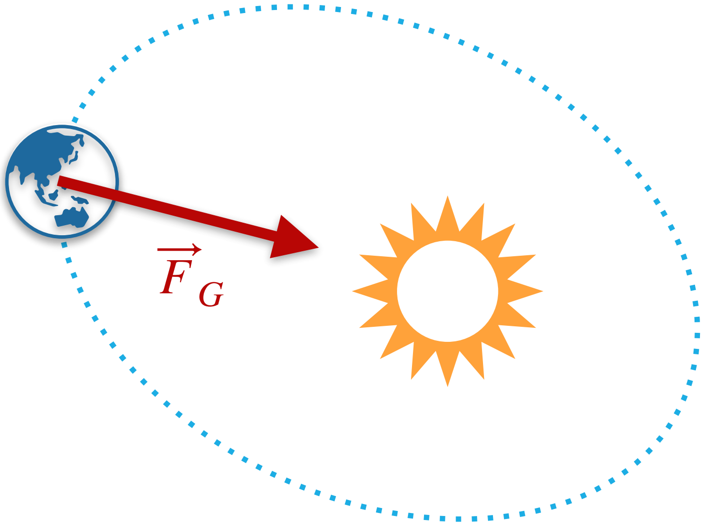
$$r =$$

Bahngeschwindigkeit: $v =$

$$m_E = 5.97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$
$$m_S = 1.99 \cdot 10^{30}\mathrm{kg}.$$

$$\left|F_G\right| = \frac{m_S m_E G}{r^2}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$$



Erde und Sonne

$$m_E = 5.97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$
$$m_S = 1.99 \cdot 10^{30}\text{kg}.$$

$$\left|F_G\right| = \frac{m_S m_E G}{r^2}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

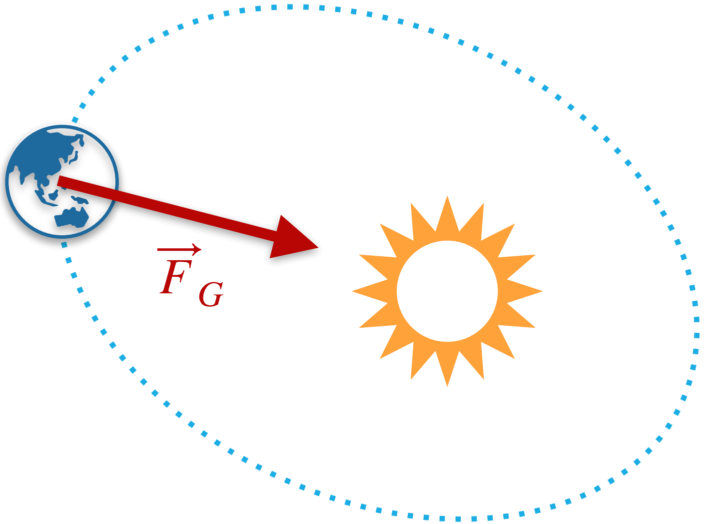
Idee: Zentripetalkraft wird durch Gravitationskraft geliefert.

$$\left|F_G\right| = \left|F_{ZP}\right|$$

$$\left|F_{ZP}\right| = m_E \omega^2 r \qquad \omega = \frac{2\pi}{365\ d} = 1.99 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Gleichsetzen liefert: $r^3 = \frac{m_S G}{\omega^2}$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{m_S G}{\omega^2}} = 149.6 \cdot 10^6\ \text{km}$$



Bahngeschwindigkeit: $v = \omega r = \sqrt{\frac{m_S G}{r}} = 29.8\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Erde und Sonne

Betrag des Drehimpuls der Erde
um die Sonne:

$$\left|L\right| = \left|m_E\, \vec{r} \times \vec{v}\right|$$

$$v = \sqrt{\frac{m_S G}{r}}$$

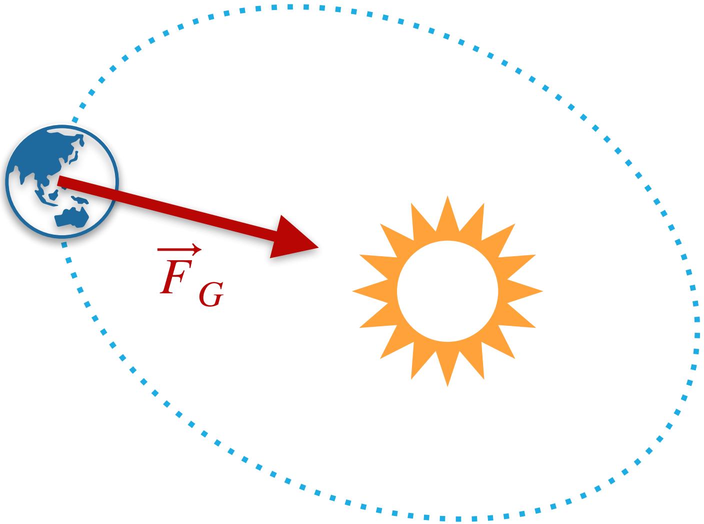
$$m_E = 5.97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$
$$m_S = 1.99 \cdot 10^{30}\text{kg}.$$

$$\left|F_G\right| = \frac{m_S m_E G}{r^2}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Bei Kreisbewegung $\vec{r} \perp \vec{v}$

$$\left|L\right| =$$



Erde und Sonne

Betrag des Drehimpuls der Erde
um die Sonne:

$$\left|L\right| = \left|m_E\, \vec{r} \times \vec{v}\right|$$

Bei Kreisbewegung $\vec{r} \perp \vec{v}$

$$\left|L\right| = m_E r v = m_E \sqrt{m_S G r} = 2.7 \cdot 10^{40}\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

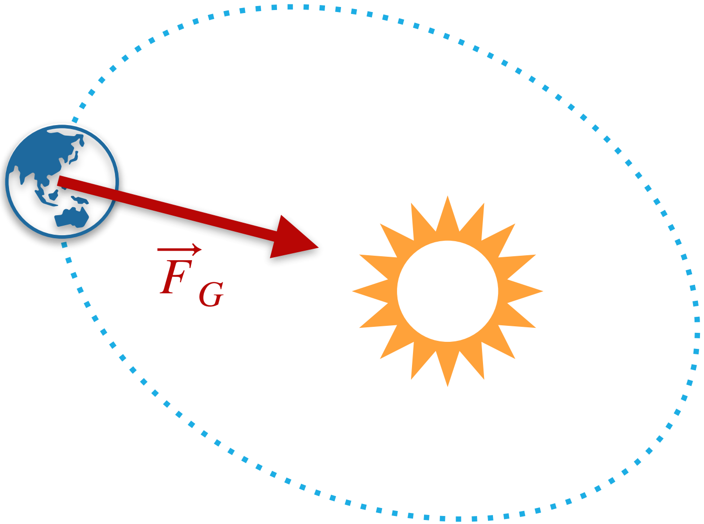
$$v = \sqrt{\frac{m_S G}{r}}$$

$$m_E = 5.97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$
$$m_S = 1.99 \cdot 10^{30}\text{kg}.$$

$$\left|F_G\right| = \frac{m_S m_E G}{r^2}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Wie weit wäre ein Planet von der Sonne entfernt, dessen Drehimpuls doppelt so gross ist, wie der der Erde?



Erde und Sonne

$$m_E = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$
$$m_S = 1.99 \cdot 10^{30} \text{kg}.$$

$$\left|F_G\right| = \frac{m_S m_E G}{r^2}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \; \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

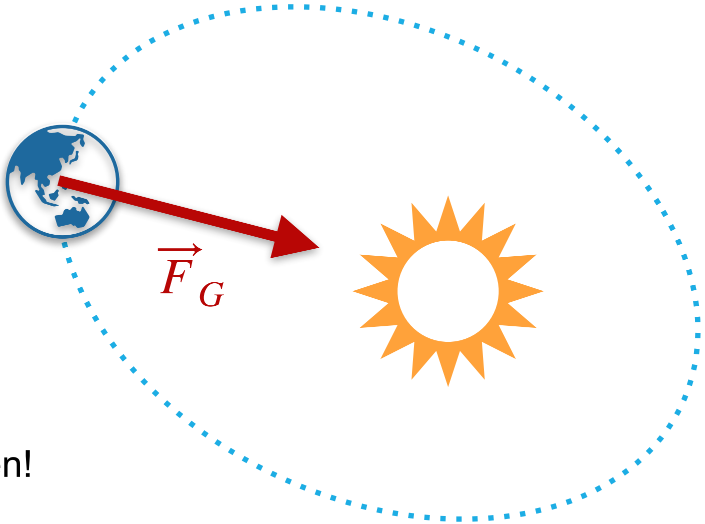
Betrag des Drehimpuls der Erde
um die Sonne:

$$v = \sqrt{\frac{m_S G}{r}}$$

$$\left|L\right| = \left|m_E \, \vec{r} \times \vec{v}\right|$$

Bei Kreisbewegung $\vec{r} \perp \vec{v}$

$$\left|L\right| = m_E r v = m_E \sqrt{m_S G r} = 2.7 \cdot 10^{40} \; \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$



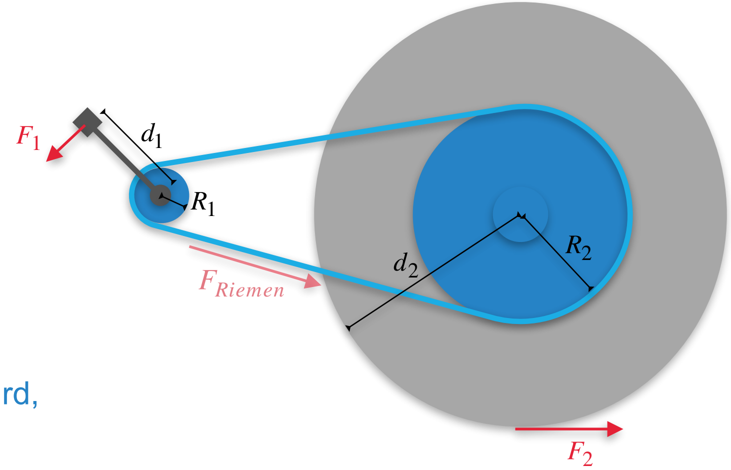
Wie weit wäre ein Planet von der Sonne entfernt, dessen Drehimpuls doppelt so gross ist, wie der der Erde?

Aus Ergebnis oben sieht man $L \sim \sqrt{r}$.
Für Verdopplung von L muss sich der Abstand also vervierfachen!

Übersetzung von Kräften

Getriebe mit Übersetzung

Das abgebildete System ermöglicht Weitergabe eines Antriebs an einem Hebel (Länge d_1) auf ein Rad mit Radius d_2.
Die beiden Getrieberäder mit Radien R_1 und R_2 sind über einen Riemen gekoppelt.



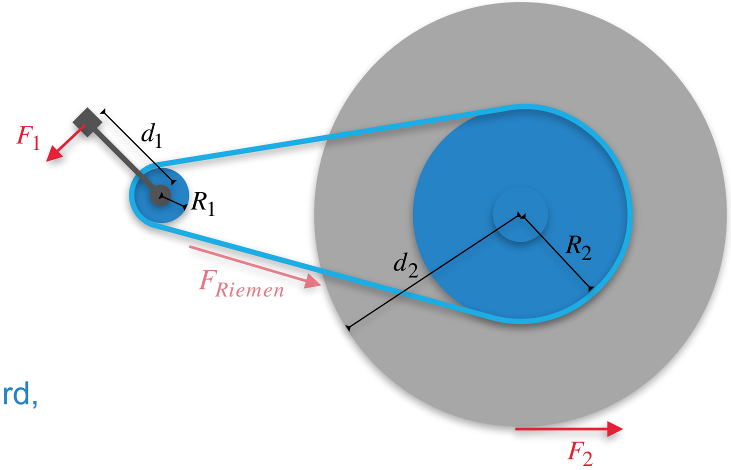
Wie hängt die Kraft F_2, welche auf der Lauffläche des Rads aufgebracht wird, mit der Kraft F_1 auf dem Hebel zusammen?
Reibungseffekte und Trägheitsmomente seien hier vernachlässigbar.

$M_1 =$ $\qquad$ $F_{Riemen} =$ $\qquad$ $F_2 =$

Wie gross ist F_2 für $d_2 = 2 \cdot d_1$ und $R_2 = 4 \cdot R_1$?

Wie lässt es sich mit der Energieerhaltung vereinbaren, dass die Kraft hier einfach vergrössert werden kann?

Getriebe mit Übersetzung



Das abgebildete System ermöglicht Weitergabe eines Antriebs an einem Hebel (Länge d_1) auf ein Rad mit Radius d_2.
Die beiden Getrieberäder mit Radien R_1 und R_2 sind über einen Riemen gekoppelt.

Wie hängt die Kraft F_2, welche auf der Lauffläche des Rads aufgebracht wird, mit der Kraft F_1 auf dem Hebel zusammen?
Reibungseffekte und Trägheitsmomente seien hier vernachlässigbar.

$$M_1 = F_1 \cdot d_1 = F_{Riemen} \cdot R_1 \longrightarrow F_{Riemen} = F_1 \cdot \frac{d_1}{R_1} \longrightarrow F_2 = F_{Riemen} \cdot \frac{R_2}{d_2} = F_1 \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

Wie gross ist F_2 für $d_2 = 2 \cdot d_1$ und $R_2 = 4 \cdot R_1$? $F_2 = 2 \cdot F_1$

Wie lässt es sich mit der Energieerhaltung vereinbaren, dass die Kraft hier einfach vergrössert werden kann?

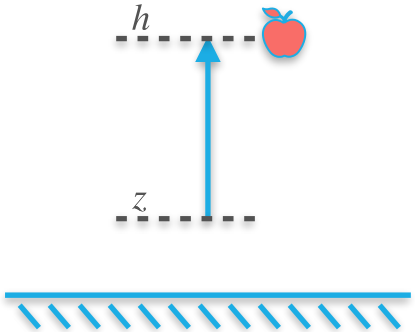
Die Strecke, die am Hebelarm zurückgelegt werden muss, ist zweimal so gross wie die Strecke, um die sich die Lauffläche des Rads weiterdreht. Die aufgebrachte Arbeit am Hebelarm ist somit wieder gleich gross wie die Arbeit, die durch das Rad verrichtet wird.

Potentielle Energie und Fluchtgeschwindigkeit

Zum Einstieg: Integrieren

Wieviel potentielle Energie gewinnt ein Apfel, wenn er von Höhe z nach Höhe h gehoben wird?

Annahme: $h \ll r_E$



$F_z = -mg$

$???$

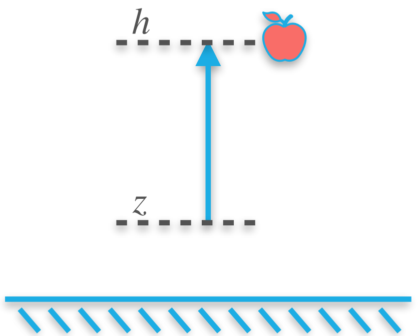
$\Delta E_{pot} = mg(h-z)$

Zum Einstieg: Integrieren

A Wieviel potentielle Energie gewinnt ein Apfel, wenn er von Höhe z nach Höhe h gehoben wird?

Annahme: $h \ll r_E$

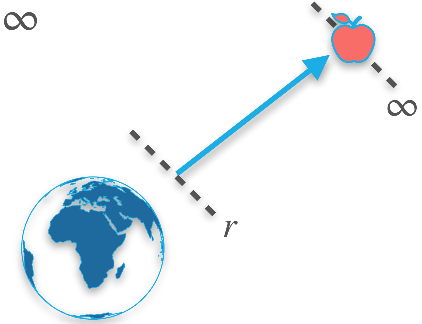
$$F_z = -mg \quad \xrightarrow{\boxed{-\int_z^h F_{z'}\, dz'}} \quad \Delta E_{pot} = mg(h-z)$$



B Wieviel potentielle Energie gewinnt der Apfel, wenn er von Abstand r bis Abstand ∞ von der Erde entfernt wird?

Gravitationskraft: $F_r = -\dfrac{mMG}{r^2}$

$$F_r = -\frac{mMG}{r^2} \quad \xrightarrow{\boxed{???}} \quad \Delta E_{pot}(r \to \infty) = ???$$

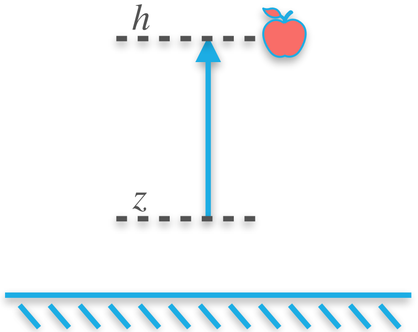


Zum Einstieg: Integrieren

A Wieviel potentielle Energie gewinnt ein Apfel, wenn er von Höhe z nach Höhe h gehoben wird?

Annahme: $h \ll r_E$

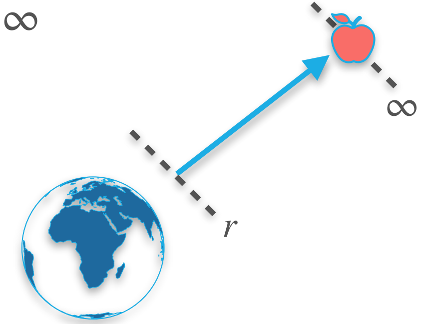
$$F_z = -mg \xrightarrow{\;-\int_z^h F_{z'}\, dz'\;} \Delta E_{pot} = mg(h-z)$$



B Wieviel potentielle Energie gewinnt der Apfel, wenn er von Abstand r bis Abstand ∞ von der Erde entfernt wird?

Gravitationskraft: $$F_r = -\frac{mMG}{r^2} \xrightarrow{\;-\int_r^\infty F_r\, dr\;} \Delta E_{pot}(r \to \infty) = \frac{mMG}{r}$$

Entspricht benötigter Energie, um aus Erdgravitation auszutreten!

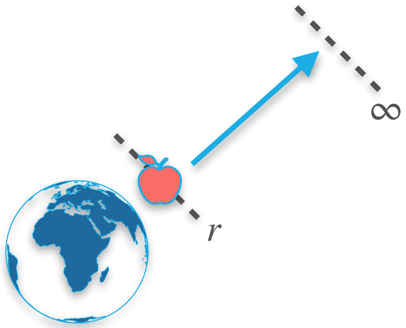


Fluchtgeschwindigkeit

$$\Delta E_{pot} = \frac{mMG}{r}$$

Welche Anfangsgeschwindigkeit muss der Apfel habe, um von r aus dem gravitativen Einfluss der Erde zu entkommen?

Tipp: Energieerhaltung!



Fluchtgeschwindigkeit

$$\Delta E_{pot} = \frac{mMG}{r}$$

Welche Anfangsgeschwindigkeit muss der Apfel habe, um von r aus dem gravitativen Einfluss der Erde zu entkommen?

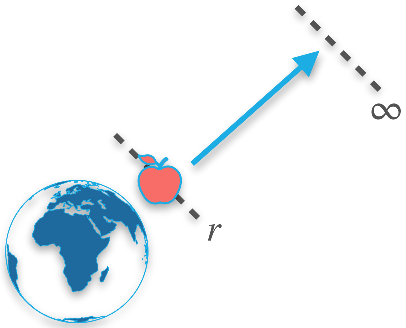
Tipp: Energieerhaltung!

Kinetische Energie wird in potentielle Energie umgewandelt:

$$E_{kin,0} = \Delta E_{pot}(r \to \infty)$$

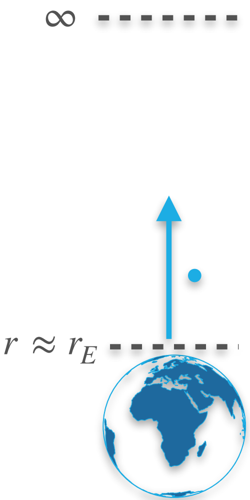
$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 = \frac{mMG}{r}$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2MG}{r}}$$



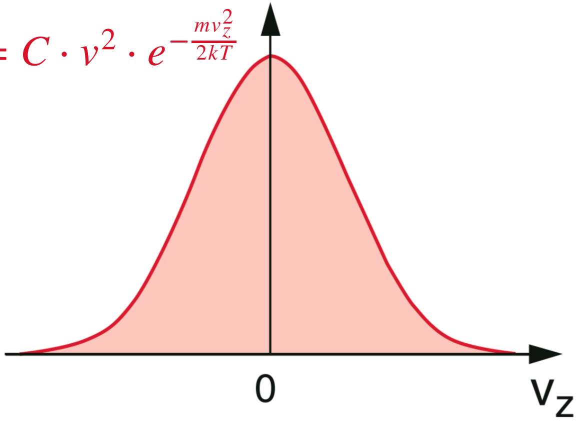
Exkurs: Warum haben wir kein H_2 und kein He in der Atmosphäre?

Fluchtgeschwindigkeit für He - Atome $$v_{esc} = \sqrt{\frac{2MG}{r}} \approx 11\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$



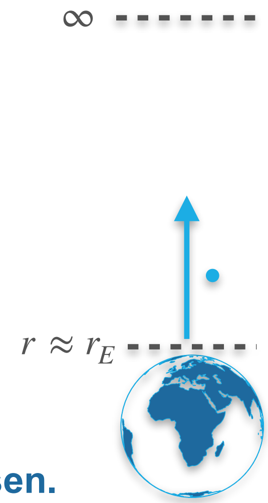
Was hat die Fluchtgeschwindigkeit mit der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung und dem Verlust von He - Atomen zu tun?

$$f\left(v_z\right) = C \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}$$



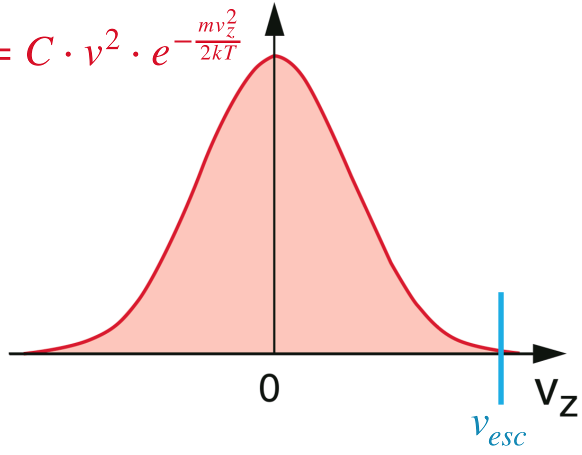
Exkurs: Warum haben wir kein H_2 und kein He in der Atmosphäre?

Fluchtgeschwindigkeit für He - Atome $\quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2MG}{r}} \approx 11\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$



Was hat die Fluchtgeschwindigkeit mit der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung und dem Verlust von He - Atomen zu tun?

$$f\left(v_z\right) = C \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}$$



Durch Kollisionen wird MWB-Verteilung aufrechterhalten.

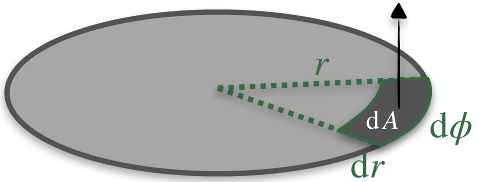
Atome mit $v > v_{esc}$ können die Erde verlassen.

Für leichte Atome sind hohe v_z viel wahrscheinlicher.

Übung zu Flächenintegralen

Flächenintegrale

Polarkoordinaten

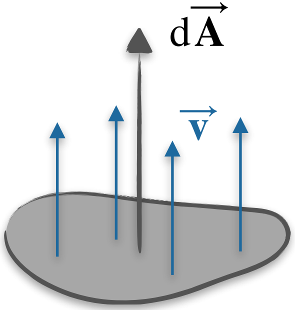


$$\mathrm{d}A = ???$$

zum Beispiel:

$$\Phi = \int\int \ldots ?$$

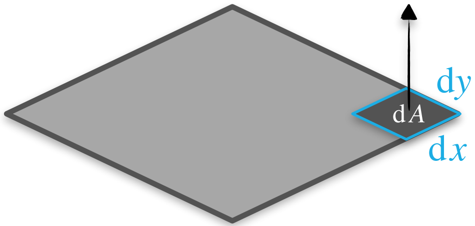
$$\mathbf{\Phi} = \int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{v}}\,(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$



$\mathrm{d}\vec{A}$ steht immer senkrecht auf Fläche.

Richtung:
Rechte-Hand-Regel

Kartesische Koordinaten



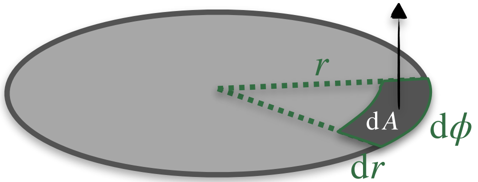
$$\mathrm{d}A = ???$$

zum Beispiel:

$$\Phi = \int\int \ldots ?$$

Flächenintegrale

Polarkoordinaten

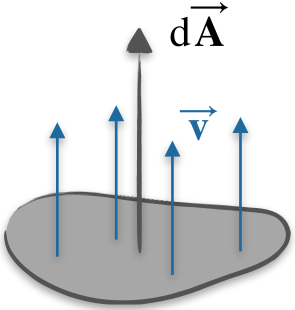


$$\mathrm{d}A = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi$$

zum Beispiel:

$$\Phi = \int_0^R \int_0^{2\pi} v_\perp \cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi$$

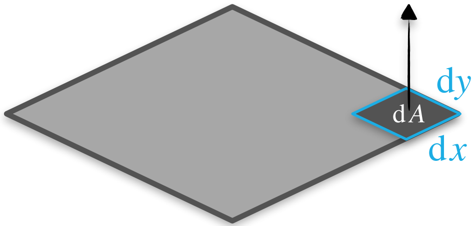
$$\Phi = \int_A \vec{\mathbf{v}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$



$\mathrm{d}\vec{A}$ steht immer senkrecht auf Fläche.

Richtung:
Rechte-Hand-Regel

Kartesische Koordinaten



$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

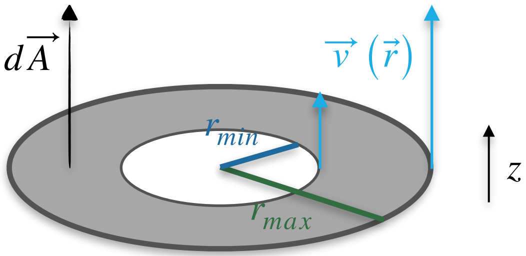
zum Beispiel:

$$\Phi = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} v_\perp\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Flächenintegral Ring

$$\mathbf{\Phi} = \int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{v}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

Vektorfeld: $\vec{v}\left(\vec{r}\right) = r \cdot \hat{z} \qquad \rightarrow v_\perp = ?$



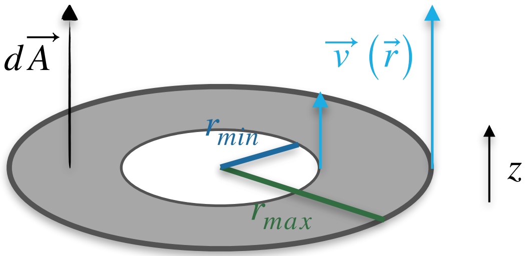
gesucht: **Fluss durch Ring mit $r_{min} = 1$ mm and $r_{max} = 2$ mm.**

$$\Phi = \int_{?}\int_{?} \dots$$

Flächenintegral Ring

$$\mathbf{\Phi} = \int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{v}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

Vektorfeld: $\vec{v}\left(\vec{r}\right) = r \cdot \hat{z} \quad \rightarrow v_\perp = r$



gesucht: **Fluss durch Ring mit $r_{min} = 1$ mm and $r_{max} = 2$ mm.**

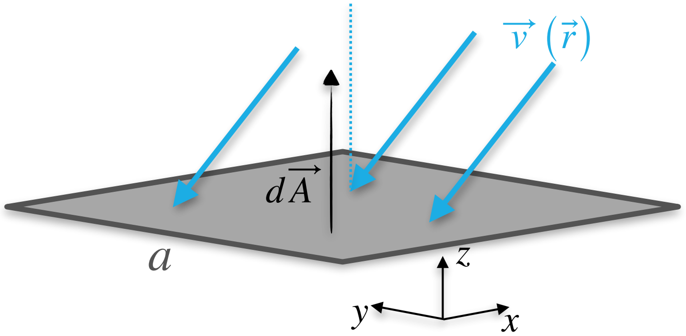
$$\Phi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_{0}^{2\pi} v_\perp(r) \cdot r \;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\phi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_{0}^{2\pi} r^2 \;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\phi = 2\pi \frac{\left(r_{max}^3 - r_{min}^3\right)}{3} = 2\pi\,\frac{7}{3}\;\mathrm{mm}^3$$

Flächenintegral quadratische Platte

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{v}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

Vektorfeld: $\vec{v} = (-1,0,-1) \quad \rightarrow v_{\perp} = ?$

gesucht: **Fluss durch Quadrat mit Kantenlänge a.**



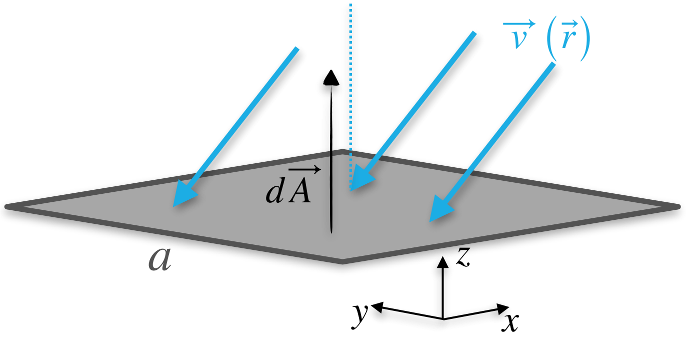
$$\Phi = \int_{?} \int_{?} \dots$$

Flächenintegral quadratische Platte

$$\mathbf{\Phi} = \int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{v}}\left(\vec{\mathbf{r}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

Vektorfeld: $\vec{v} = (-1{,}0, -1) \quad \rightarrow v_{\perp} = -1$

gesucht: **Fluss durch Quadrat mit Kantenlänge a.**



$$\Phi = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} v_{\perp} \cdot \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = -a^2$$

Clicker-Fragen

Frage 1

Gezeigt ist eine Scheibe, an der 2 Kräfte wirken. Welche 3. Kraft muss im Punkt P angreifen, damit das resultierende Drehmoment = 0 ist?

a) 

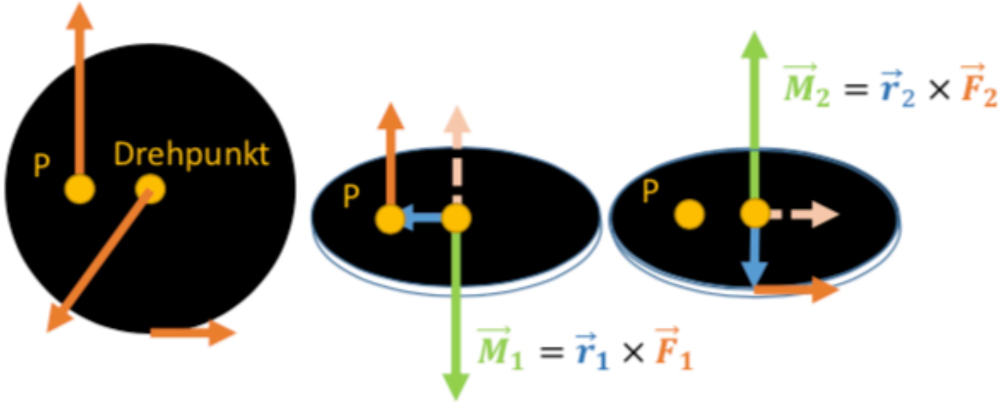
b) 

c) 

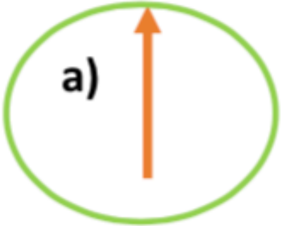
d) 

Frage 1

Gezeigt ist eine Scheibe, an der 2 Kräfte wirken. Welche 3. Kraft muss im Punkt P angreifen, damit das resultierende Drehmoment = 0 ist?



a)



b)

c)

d)

Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

→ Wir suchen eine Kraft, welche dazu führt, dass sich alle Drehmomente aufheben

b) nicht, weil radiale Kräfte kein Drehmoment ausüben

c) nicht, weil diese Kraft ein zusätzliches Drehmoment kreiert (nutze Rechte Hand Regel)

d) nicht, siehe c)

Zu a) die Kraft setzt am halben Radius an, muss also auch doppelt so gross wie die gegebene Kraft sein.

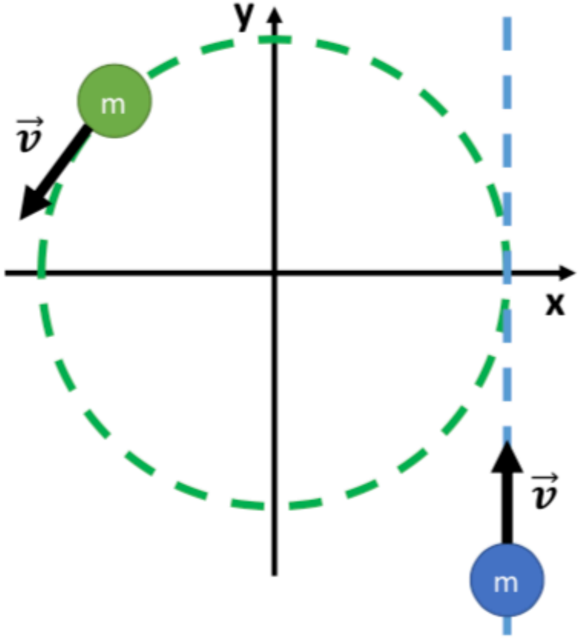
Frage 2

Beide Kugeln haben einen Drehimpuls um den Ursprung herum.
Welche Aussage stimmt?

a) $\left|\vec{L}_{grün}\right| < \left|\vec{L}_{blau}\right|$

b) $\left|\vec{L}_{grün}\right| = \left|\vec{L}_{blau}\right|$

c) $\left|\vec{L}_{grün}\right| > \left|\vec{L}_{blau}\right|$



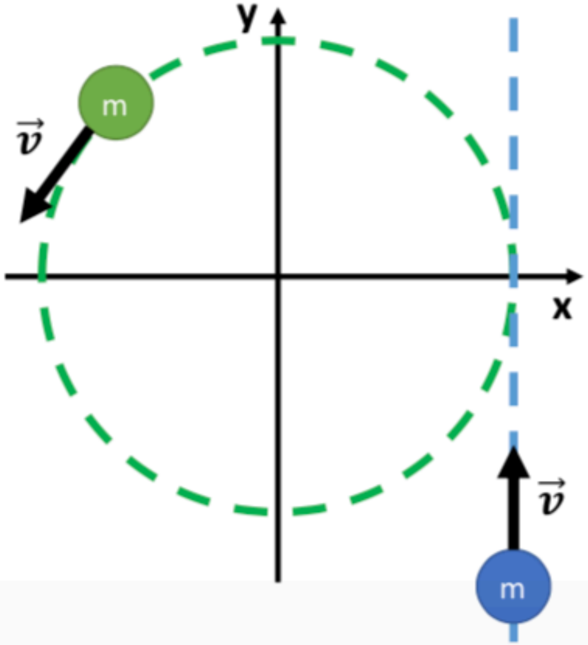
Frage 2

Beide Kugeln haben einen Drehimpuls um den Ursprung herum.
Welche Aussage stimmt?

a) $\left|\vec{L}_{grün}\right| < \left|\vec{L}_{blau}\right|$

b) $\left|\vec{L}_{grün}\right| = \left|\vec{L}_{blau}\right|$

c) $\left|\vec{L}_{grün}\right| > \left|\vec{L}_{blau}\right|$



Drehimpuls ist erhalten, und am Punk (x,0) haben klarerweise beide denselben Drehimpuls

Frage 3

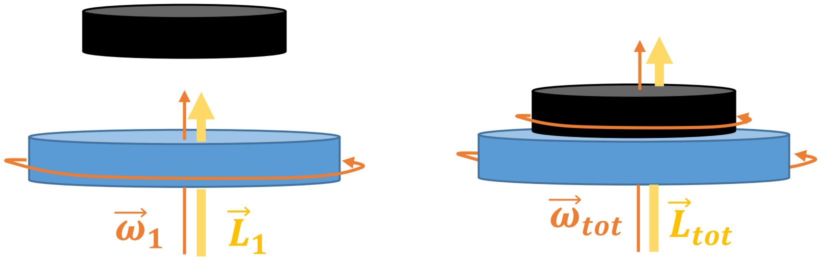
Scheibe 1 dreht sich mit Drehimpuls $\vec{L}_1$. Nun wird Scheibe 2 (ruhend) auf Scheibe 1 fallen gelassen und beide Scheiben rotieren dann zusammen. Welche Aussage stimmt? Verluste durch Reibung können vernachlässigt werden.

a) $\left|\vec{L}_{tot}\right| > \left|\vec{L}_1\right| \rightarrow \omega_{tot} < \omega_1$

b) $\left|\vec{L}_{tot}\right| < \left|\vec{L}_1\right| \rightarrow \omega_{tot} < \omega_1$

c) $\left|\vec{L}_{tot}\right| = \left|\vec{L}_1\right| \rightarrow \omega_{tot} = \omega_1$

d) $\left|\vec{L}_{tot}\right| = \left|\vec{L}_1\right| \rightarrow \omega_{tot} < \omega_1$



Frage 3

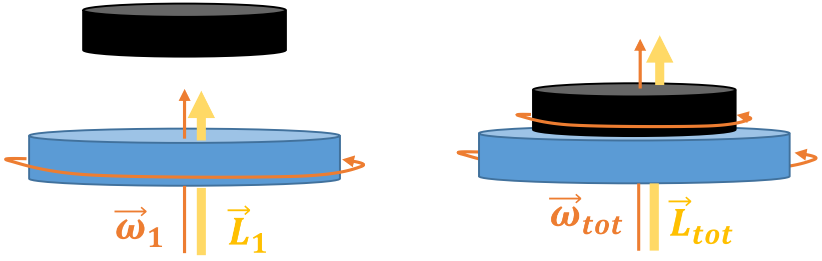
Scheibe 1 dreht sich mit Drehimpuls $\vec{L}_1$. Nun wird Scheibe 2 (ruhend) auf Scheibe 1 fallen gelassen und beide Scheiben rotieren dann zusammen. Welche Aussage stimmt? Verluste durch Reibung können vernachlässigt werden.

a) $\left|\vec{L}_{tot}\right| > \left|\vec{L}_1\right| \rightarrow \omega_{tot} < \omega_1$

b) $\left|\vec{L}_{tot}\right| < \left|\vec{L}_1\right| \rightarrow \omega_{tot} < \omega_1$

c) $\left|\vec{L}_{tot}\right| = \left|\vec{L}_1\right| \rightarrow \omega_{tot} = \omega_1$

d) $\left|\vec{L}_{tot}\right| = \left|\vec{L}_1\right| \rightarrow \omega_{tot} < \omega_1$



Da Reibung explizit vernachlässigt werden kann, ist L erhalten.
Zu c): ω wird sicher kleiner, da derselbe Drehimpuls mit beiden Massen geliefert werden muss!

Weitere Konzeptfragen

Die folgenden Fragen sind extrahiert von
“Konzeptfragen zur Newtonschen Mechanik und Thermodynamik”
von Rafael Gort

Frage 4

Eine Eiskunstläuferin vollführt eine Piruette. Damit sie sich schneller drehen kann, zieht sie die Arme zum Körper. Wie verändert sich dadurch die Rotationsenergie der Eiskunstläuferin.

1. Sie nimmt zu, weil sie schneller rotiert.
2. Sie nimmt ab, da ihr Trägheitsmoment abnimmt.
3. Sie bleibt gleich.
4. Zu wenig Informationen.

Frage 4

Eine Eiskunstläuferin vollführt eine Piruette. Damit sie sich schneller drehen kann, zieht sie die Arme zum Körper. Wie verändert sich dadurch di
kunstläuferin.

1. Sie nimmt zu, weil sie sch
2. Sie nimmt ab, da ihr Träg
3. Sie bleibt gleich.
4. Zu wenig Informationen.

Antwort: 1. Die Rotationsenergie nimmt zu.

Man kann die kinetische Energie im Schwerpunkt beschreiben als:

$$T = \frac{1}{2} J_\mathrm{A} \boldsymbol{\omega}^2$$

Man kann die obige Formel abändern mit Hilfe von $\mathbf{L} = J_\mathrm{A}\boldsymbol{\omega}$:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{L} \boldsymbol{\omega}$$

Da der Drehimpuls erhalten ist, und die Winkelgeschwindigkeit zunimmt, muss die Rotationsenergie zunehmen.