Engaging Physics Tutoring

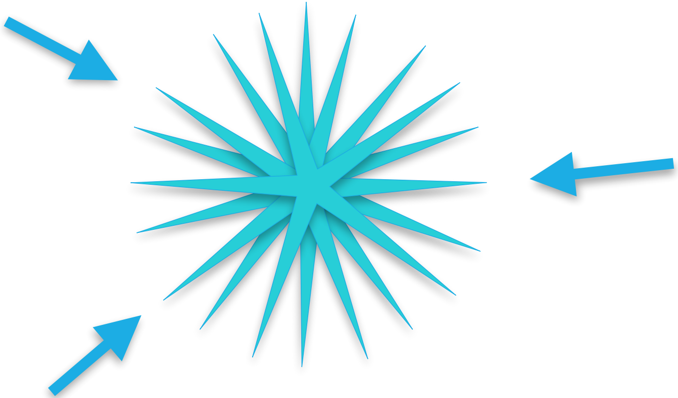
Physik I

Lektion 11

Harmonische Oszillatoren mit und ohne Antrieb

Themen der Lektion

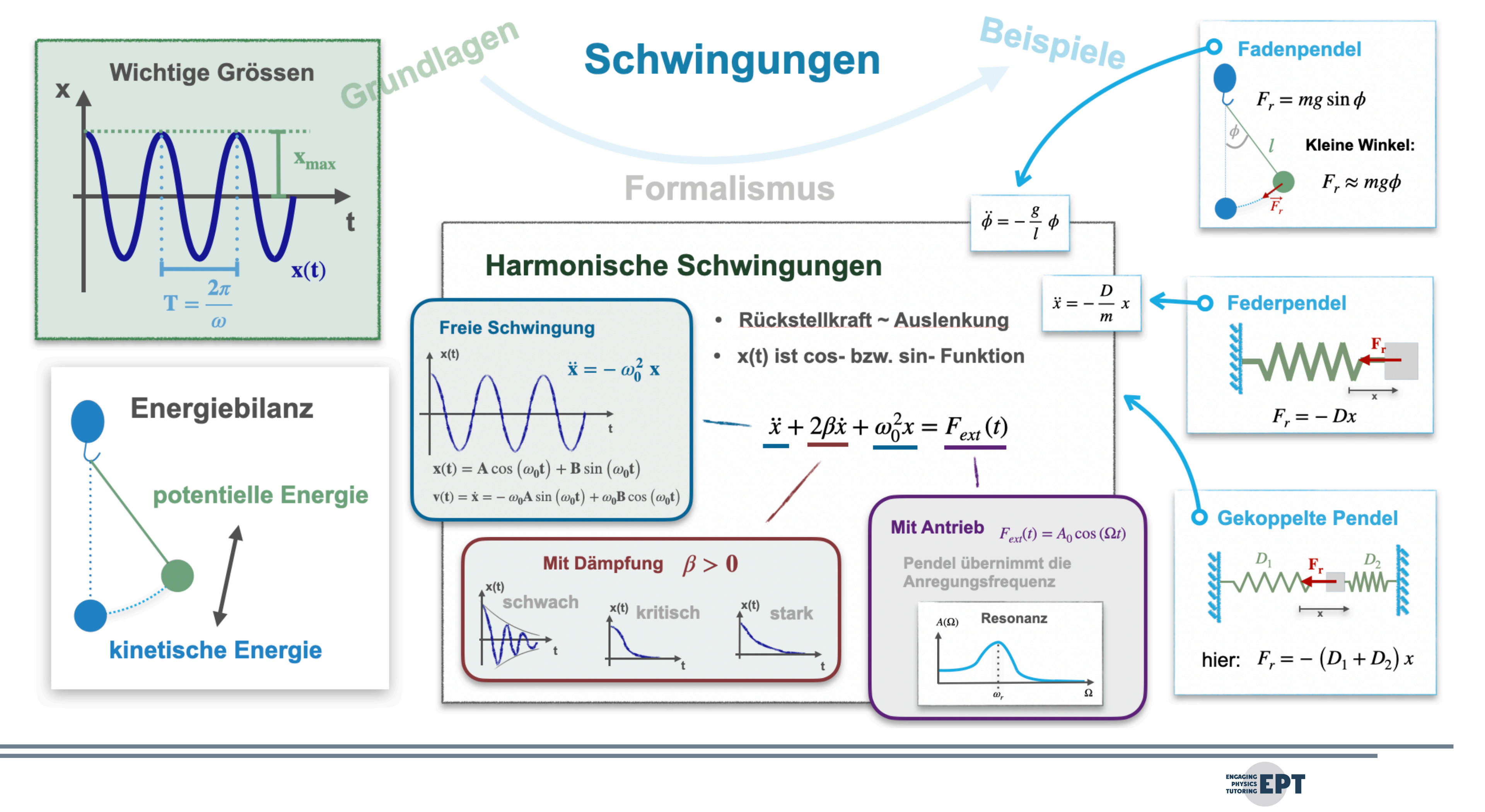
Freier Oszillator



Gedämpfter Oszillator

Oszillator mit Antrieb

Übersicht


Schwingungen
Grundlagen
Beispiele
Formalismus
Wichtige Grössen
x
t
x_{max}
$x(t)$
$T = \frac{2\pi}{\omega}$
Energiebilanz
potentielle Energie
kinetische Energie
Harmonische Schwingungen
Freie Schwingung
$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$
$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
$v(t) = \dot{x} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$
• Rückstellkraft ~ Auslenkung
• x(t) ist cos- bzw. sin- Funktion
$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_{ext}(t)$
Mit Dämpfung $\beta > 0$
schwach
kritisch
stark
Mit Antrieb $F_{ext}(t) = A_0\cos(\Omega t)$
Pendel übernimmt die Anregungsfrequenz
Resonanz
$A(\Omega)$
ω_r
Ω
$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\phi$
Fadenpendel
$F_r = mg\sin\phi$
ϕ
l
Kleine Winkel:
$F_r \approx mg\phi$
$\vec{F}_r$
$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x$
Federpendel
F_r
x
$F_r = -Dx$
Gekoppelte Pendel
D_1
D_2
F_r
x
hier: $F_r = -(D_1 + D_2)x$
ENGAGING PHYSICS TUTORING EPT

Puzzles zum Überblick

Puzzle I zu harmonischen Oszillatoren

Harmonische Oszillatoren - Puzzle

Welche Schaubilder passen zu welchen Bezeichnungen, Bewegungsgleichungen und Ortsfunktionen?

ungedämpfter HO

gedämpfter HO

angetriebener HO mit Dämpfung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

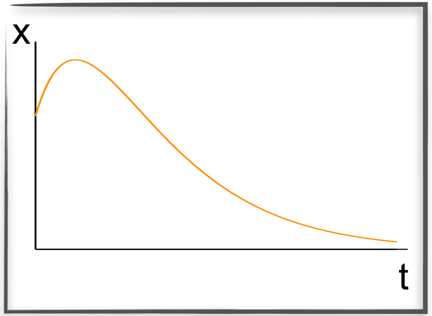
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \sin \Omega t$$

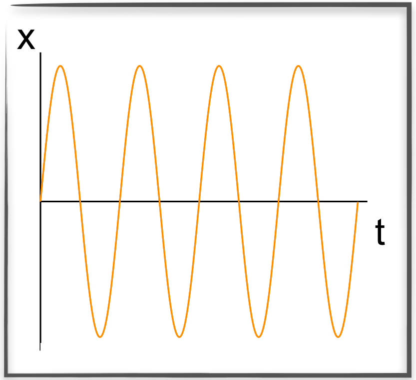
$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

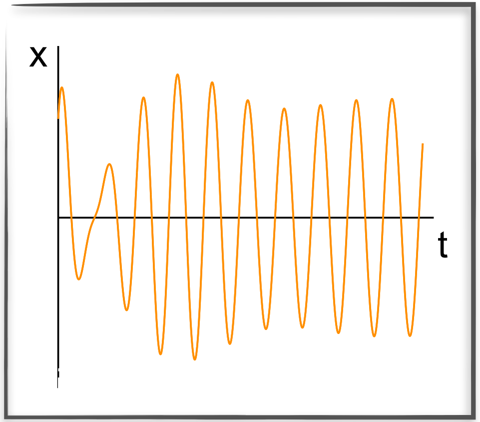
$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\; t\right)$$

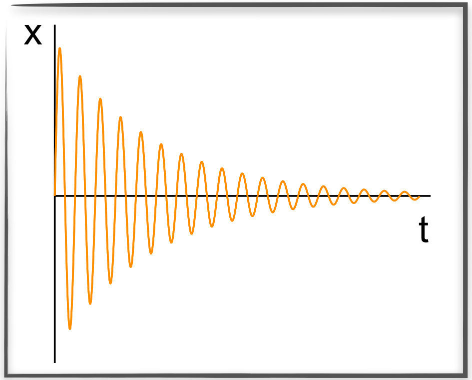
$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\; t\right) + f\left(\omega_0, \gamma, \Omega\right)\sin \Omega t$$

$$x(t) = (A + Bt)\,e^{-\gamma t}$$





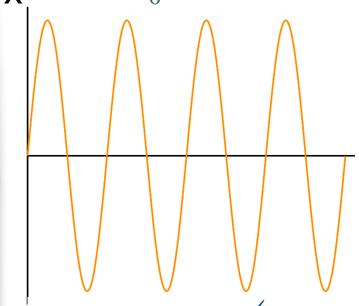




Harmonische Oszillatoren - Puzzle Auflösung

ungedämpfter HO

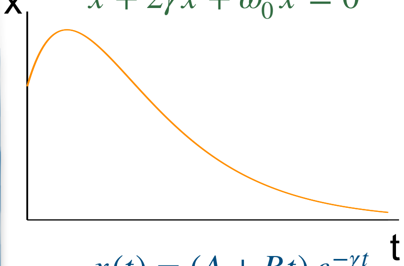
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

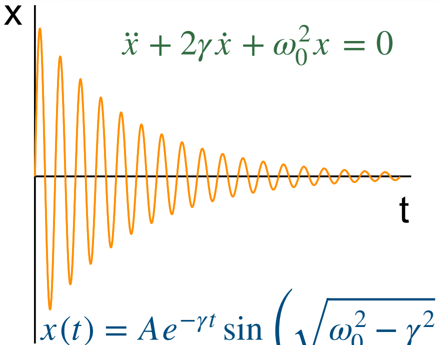
gedämpfter HO

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t}$$

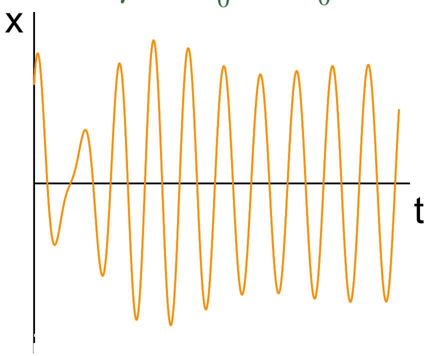
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\; t\right)$$

angetriebener HO mit Dämpfung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \sin\Omega t$$



$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\; t\right) + f\left(\omega_0, \gamma, \Omega\right)\sin\Omega t$$

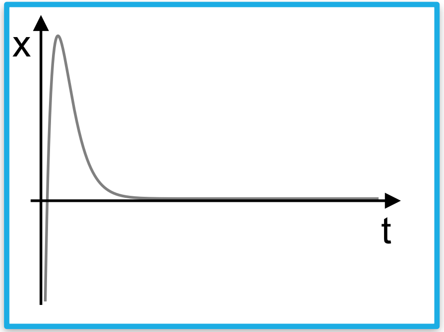
Puzzle II zu gedämpften Oszillatoren

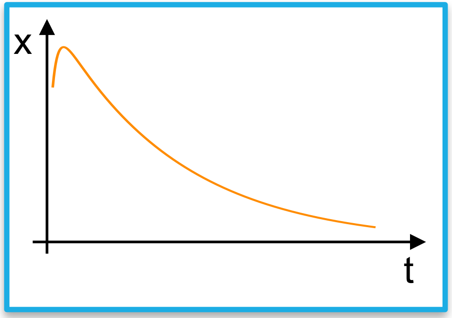
Gedämpfte Schwingungen - Puzzle

Bew-Gl. gedämpfte harmonische Schwingung: $\ddot{\mathbf{x}} + 2\delta\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x} = 0$ δ : *Stärke der Dämpfung*

Aperiodischer Grenzfall

Schwingfall   **Kriechfall**





$x(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}$ $\lambda_{1/2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

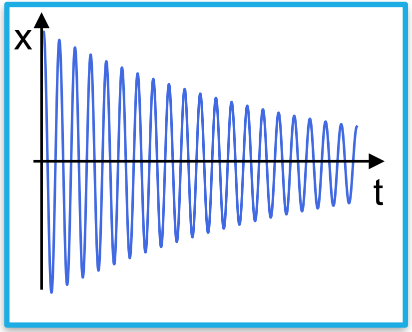
$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos\left(\omega t + \phi_0\right)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$x(t) = (A + Bt)\,e^{-\delta t}$

$\delta^2 < \omega_0^2$

$\delta^2 = \omega_0^2$

$\delta^2 > \omega_0^2$

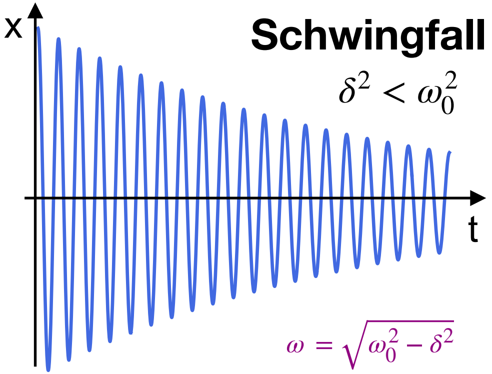


Gedämpfte Schwingungen - Zusammenfassung

Bew-Gl. gedämpfte harmonische Schwingung: $\ddot{\mathbf{x}} + 2\delta\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x} = 0$ δ : *Stärke der Dämpfung*

Schwingfall

$\delta^2 < \omega_0^2$

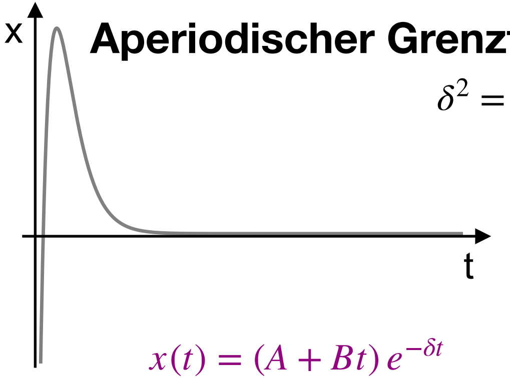


$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos\left(\omega t + \phi_0\right)$

Aperiodischer Grenzfall

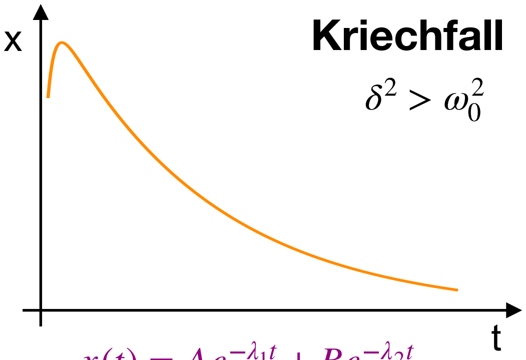
$\delta^2 = \omega_0^2$



$x(t) = (A + Bt)\,e^{-\delta t}$

Kriechfall

$\delta^2 > \omega_0^2$



$x(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}$

$\lambda_{1/2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Schwache Dämpfung

Amplitude nimmt exponentiell ab

Kritische Dämpfung

schnellstmögliche Rückkehr zu Ruhezustand

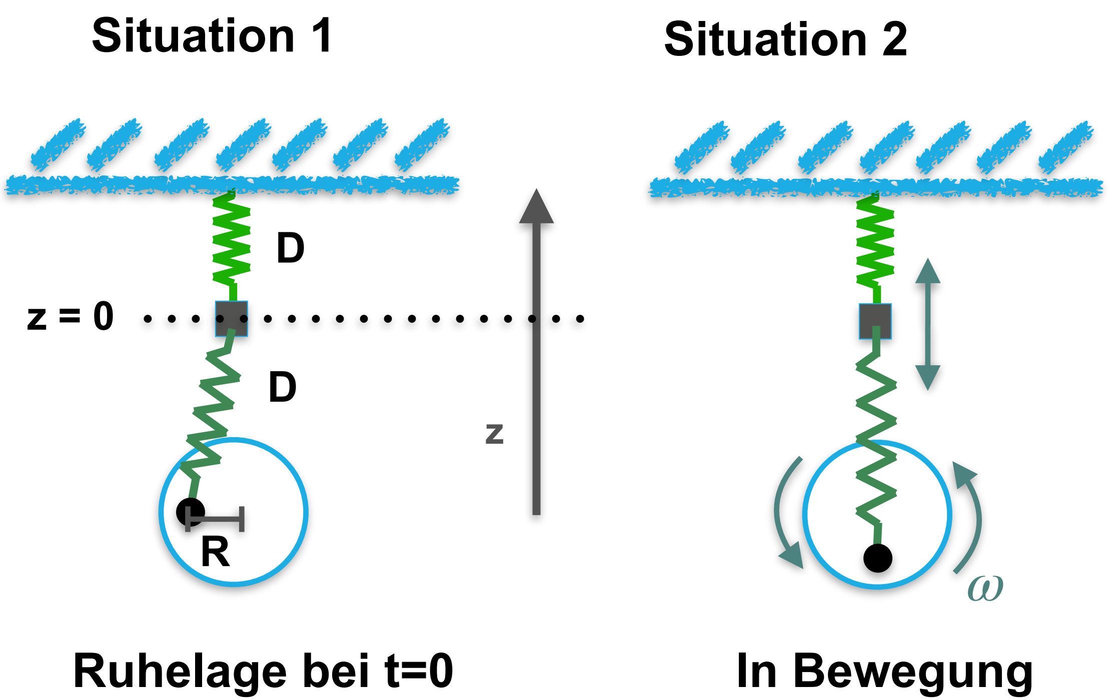
Starke Dämpfung

langsame Rückkehr zu Ruhezustand

Beispiel getriebener Oszillator

Erzwungene Schwingung

Wie sieht die Bewegungsgleichung für die Masse m aus?



(Vernachlässige Auslenkung der Feder in x-Richtung)

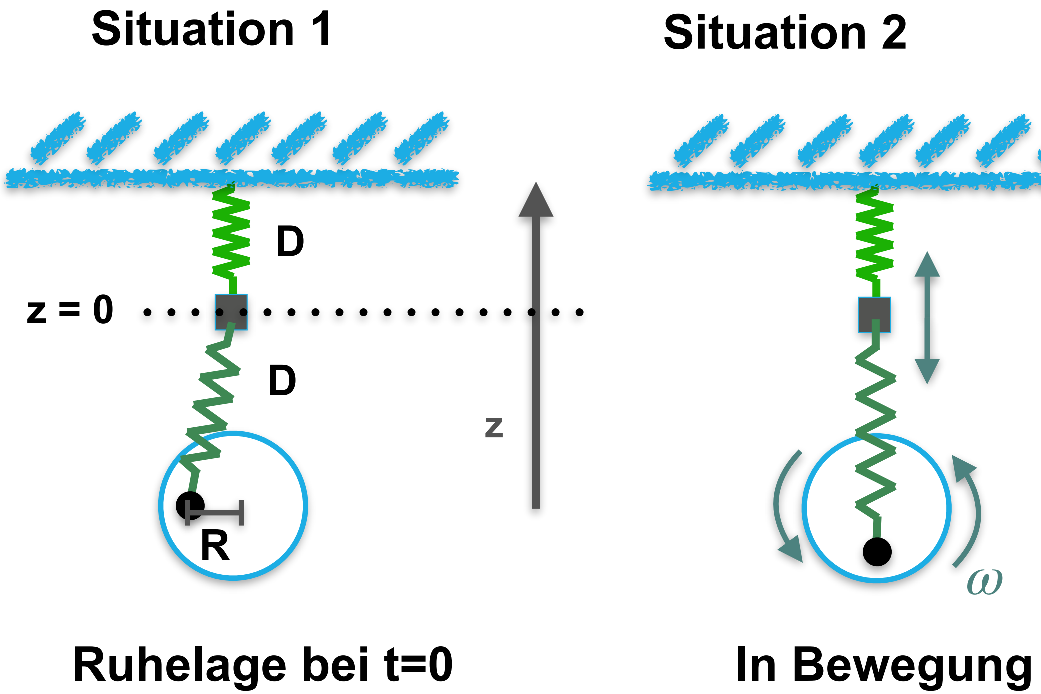
A) Kraft von Feder oben

B) Kraft von Feder unten

C) Bewegungsgleichung

Erzwungene Schwingung

Wie sieht die Bewegungsgleichung für die Masse m aus?



(Vernachlässige Auslenkung der Feder in x-Richtung)

A) Kraft von Feder oben

$$F_1 = -Dz$$

B) Kraft von Feder unten

$$F_2 = -D\left(z + R\sin\omega t\right)$$

C) Bewegungsgleichung

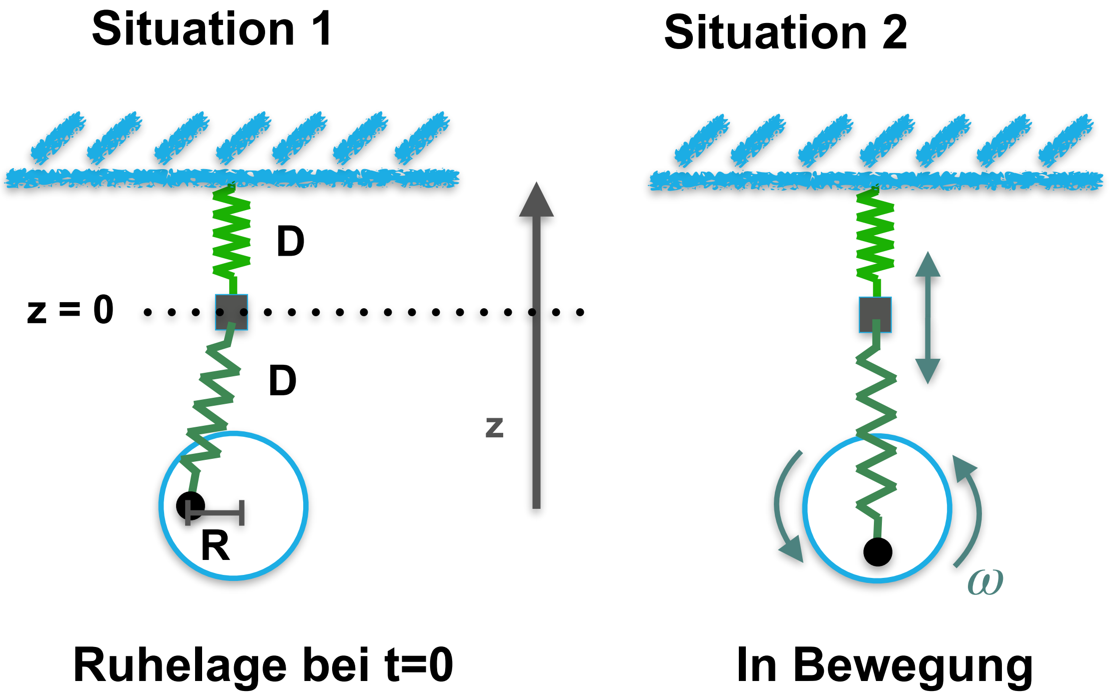
$$m\ddot{z} = F_1 + F_2$$

$$m\ddot{z} = -Dz - D\left(z + R\sin\omega t\right)$$

$$m\ddot{z} = -2Dz - DR\sin\omega t$$

Erzwungene Schwingung

Was ist die Resonanzfrequenz des Systems (ohne Rechnung)?



$$\ddot{z} + \frac{2D}{m} z = -DR \sin \omega t$$

Es gibt hier keine Reibung.
Also entspricht die Resonanzfrequenz der Eigenfrequenz.

⇒ Ablesen aus Bewegungsgleichung:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{m}}$$

Clicker-Fragen

Frage 1

Welche der folgenden Aussagen zu Schwingungen sind korrekt?

A) Bei einem Pendel mit geringer Dämpfung wird die Schwingungsdauer über die Zeit immer länger, bis das Pendel schliesslich stehen bleibt.

B) Ein periodisch angetriebener Oszillator wird nach einer gewissen Zeit immer die Frequenz der Anregung übernehmen.

C) Eine Schwingung kann nur harmonisch sein, solange es keine Dämpfung und keinen Antrieb gibt.

D) Unter kritischer Dämpfung kehrt ein Oszillator am schnellsten in die Ruhelage zurück.

Frage 1

Welche der folgenden Aussagen zu Schwingungen sind korrekt?

nur die Amplitude ändert sich! Die Frequenz bleibt gleich.

A) Bei einem Pendel mit geringer Dämpfung wird die Schwingungsdauer über die Zeit immer länger, bis das Pendel schliesslich stehen bleibt.

Ein periodisch angetriebener Oszillator wird nach einer gewissen Zeit immer die Frequenz der Anregung übernehmen.

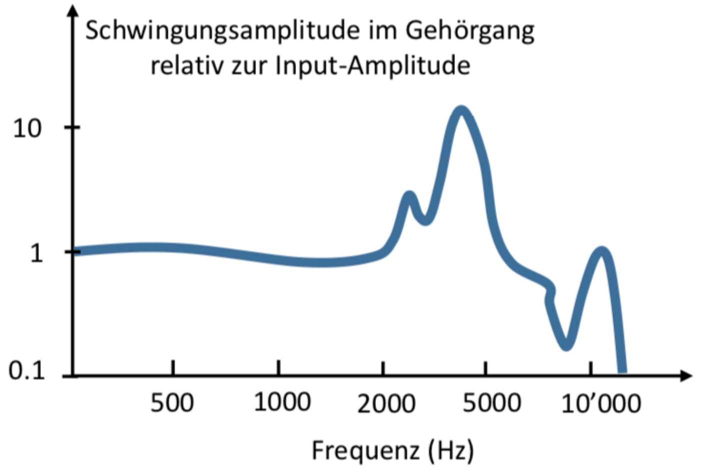
C) Eine Schwingung kann nur harmonisch sein, solange es keine Dämpfung und keinen Antrieb gibt.

Harmonisch bezieht sich nur auf die Rückstellkraft, die proportional zur Auslenkung ist.

) Unter kritischer Dämpfung kehrt ein Oszillator am schnellsten in die Ruhelage zurück.

Frage 2

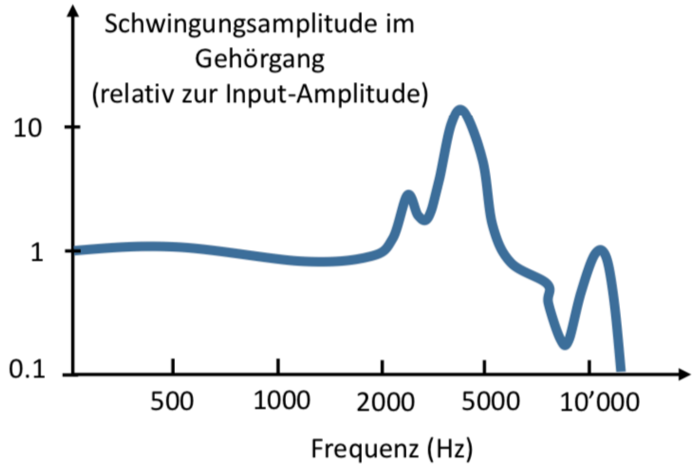
Gezeigt ist das Resonanzverhalten des Gehörganges für unterschiedliche Tonhöhen. Was zeigt diese Grafik?



Angepasst von D. Begault, L. Trejo, *3-D sound for virtual reality and multimedia.* (2000).

a) Ein Ton bei 4000 Hz muss 10 mal lauter sein, als eine Schwingung bei 500 Hz damit man ihn hört.
b) Der Gehörgang schwingt ungefähr gleichschnell im Bereich 500 - 2000 Hz.
c) Im Bereich um 5000 Hz ist der Gehörgang besonders unempfindlich.
d) Töne um 3000 Hz schwingen im Gehörgang stärker als Töne um 10'000 Hz.

Frage 2



Angepasst von D. Begault, L. Trejo, *3-D sound for virtual reality and multimedia.* (2000).

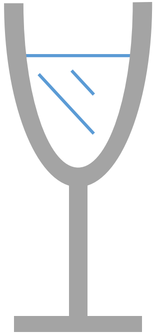
Gezeigt ist das Resonanzverhalten des Gehörganges für unterschiedliche Tonhöhen. Was zeigt diese Grafik?

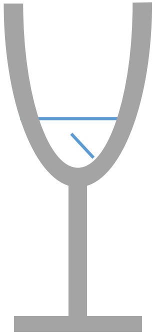
a) Nein, es ist genau umgekehrt: der Gehörgang reagiert mit 10 mal grösserer Schwingungsamplitude!
b) Nein, die Geschwindigkeit der Schwingung hängt mit der Frequenz zusammen und die ist ja grösser bei 2000 Hz.
c) Nein, es ist genau das Gegenteil (siehe a))
d) Ja, die Schwingungsamplitude relativ zur Input-Amplitude ist bei 3000 Hz grösser als bei 10’000 Hz

a) Ein Ton bei 4000 Hz damit man ihı
b) Der Gehörgang schwingt ungefähr gleichschnell im Bereich 500 - 2000 Hz.
c) Im Bereich um 5000 Hz ist der Gehörgang besonders unempfindlich.
d) Töne um 3000 Hz schwingen im Gehörgang stärker als Töne um 10’000 Hz.

Frage 3

Wenn man mit nassen Fingern über den Rad eines Weinglases streicht, kann man das Glas zum «klingen» bringen. Wie muss das Glas gefüllt werden um den tiefsten Ton zu erzeugen?

a) 

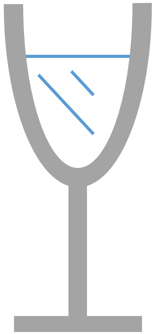
b) 

c) Egal, der Finger-Druck ist entscheidend

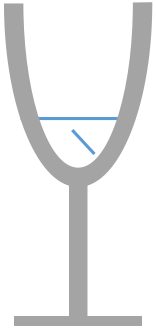
Frage 3

Wenn man mit nassen Fingern über den Rad eines Weinglases streicht, kann man das Glas zum «klingen» bringen. Wie muss das Glas gefüllt werden um den tiefsten Ton zu erzeugen?

a)



b)



Das Glas schwingt mit dem Wasser zusammen. Analog zum Federpendel gilt dann $f_0 \propto \sqrt{\frac{D}{m}}$

wobei m nicht die genaue Masse des Wassers ist, aber die Trägheit des Glases+Wasser beschreibt. Da die Trägheit mit dem Wasser zunimmt, wird f_0 kleiner.
Der Fingerdruck erhöht nur die Amplitude (Lautstärke).

Frage 4

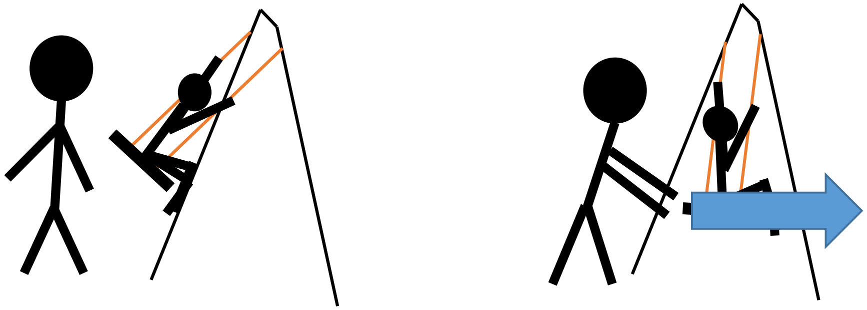
Mein kleiner Neffe kann noch nicht selber schaukeln, deshalb schubse ich seine Schaukel an. Am besten schubse ich immer genau dann, wenn er sich durch die Ruhelage der Schaukel nach vorne bewegt. Welche relative Phase haben dann meine Schubser und seine momentane Position in der Schaukelbewegung?

a) $\Delta\varphi = 0$

b) $\Delta\varphi = \pi/2$

c) $\Delta\varphi = \pi$

d) $\Delta\varphi = 2\pi$



Frage 4

Maximale Kraft ist immer dann, wenn die Auslenkung minimal ist. Skizzenhaft sähe es so aus:

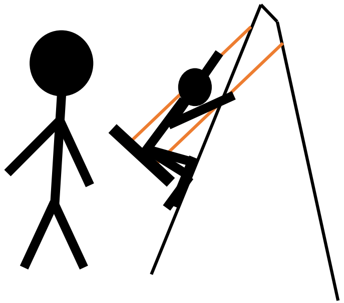
Mein kleiner Neffe kann noch nicht selber schaukeln, deshalb schubse ich seine Schaukel an. Am besten schubse ich immer genau dann, wenn er sich durch die Ruhelage der Schaukel nach vorne bewegt. Welche relative Phase haben dann meine Schubser und und seine momentane Position in der Schaukelbewegung?

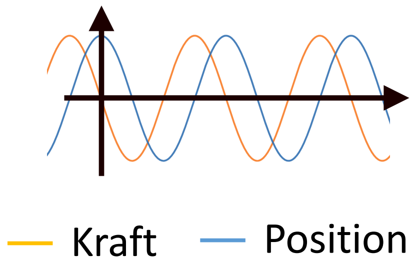
a) $\Delta\varphi = 0$

b) $\Delta\varphi = \pi/2$

c) $\Delta\varphi = \pi$

d) $\Delta\varphi = 2\pi$



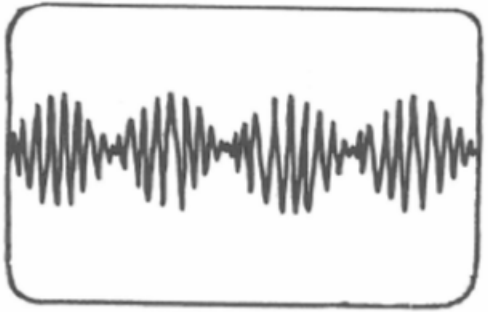


Frage 5: Schwebung

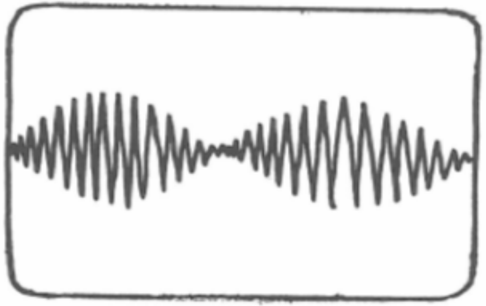
Zwei verschiedene Töne werden zur selben Zeit zum Klingen gebracht. Ihre Klänge werden addiert und die Summe auf einem Oszillografen dargestellt, Schirm A. Dann wird ein anderes Paar von Tönen zum Klingen gebracht und deren Summe auf dem Oszillografen dargestellt, Schirm B. Man erkennt an den beiden Oszillogrammen, dass die Töne auf Schirm A

a) frequenzmäßig enger sind
b) frequenzmäßig weiter auseinander sind
c) frequenzmäßig gleich eng wie auf Schirm B sind
d) dieselben Frequenzen wie auf Schirm B haben
e) Es gibt keine Möglichkeit, aus den Oszillogrammen zu beurteilen, welches Paar Töne frequenzmäßig ähnlicher ist.

A



B



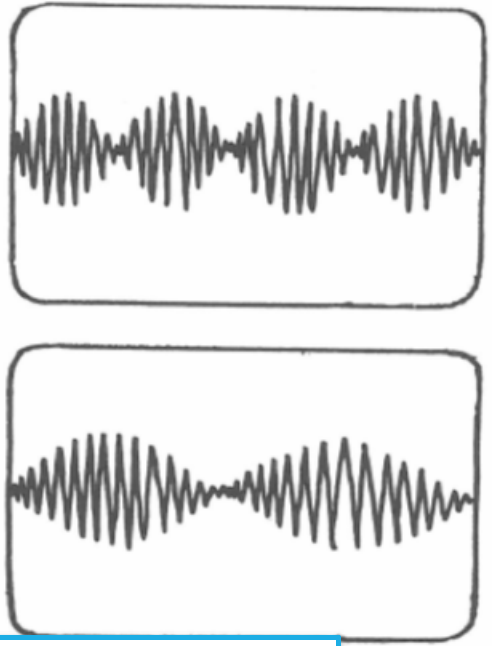
Frage 5: Schwebung

Zwei verschiedene Töne werden zur selben Zeit zum Klingen gebracht. Ihre Klänge werden addiert und die Summe auf einem Oszillografen dargestellt, Schirm A. Dann wird ein anderes Paar von Tönen zum Klingen gebracht und deren Summe auf dem Oszillografen dargestellt, Schirm B. Man erkennt an den beiden Oszillogrammen, dass die Töne auf Schirm A

a) frequenzmäßig enger sind
frequenzmäßig weiter auseinander sind
c) frequenzmäßig gleich eng wie auf Schirm B sind
d) dieselben Frequenzen wie auf Schirm B haben
e) Es gibt keine Möglichkeit, aus den Oszillogrammen zu beurteilen, welches Paar Töne frequenzmäßig ähnlicher ist.

A

B



$$\sin\left(\omega_1 t\right) + \sin\left(\omega_2 t\right) = 2\sin\left(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}\right)$$