Engaging Physics Tutoring

Physik I

Lektion 10

Einführung Schwingungen
Harmonischer Oszillator

Themen der Lektion

Einführung in Schwingungen

Wie beschreiben?

Wie visualisieren?

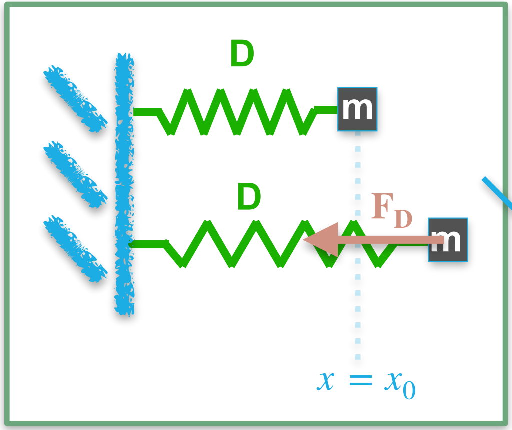
Harmonischer Oszillator

Was ist das?

Wie berechnen?

Überblick

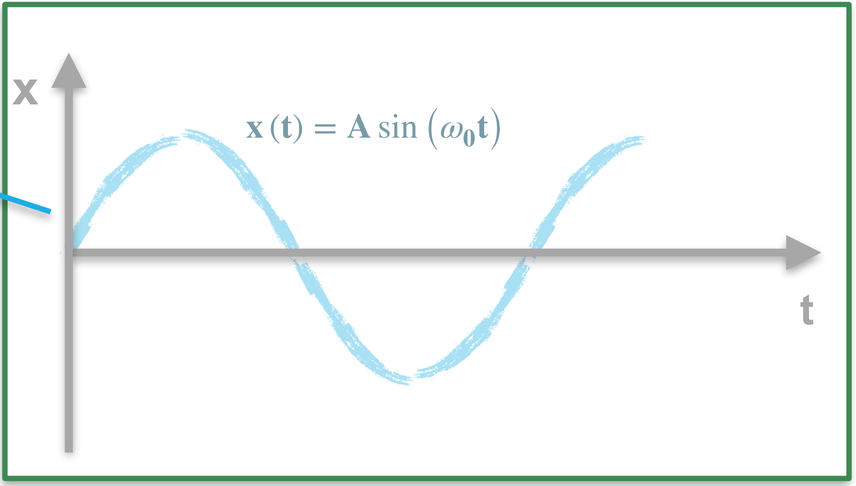
Wo ist der Zusammenhang?



$$\ddot{\mathbf{x}} = -\,\omega_0^2\ \mathbf{x}$$

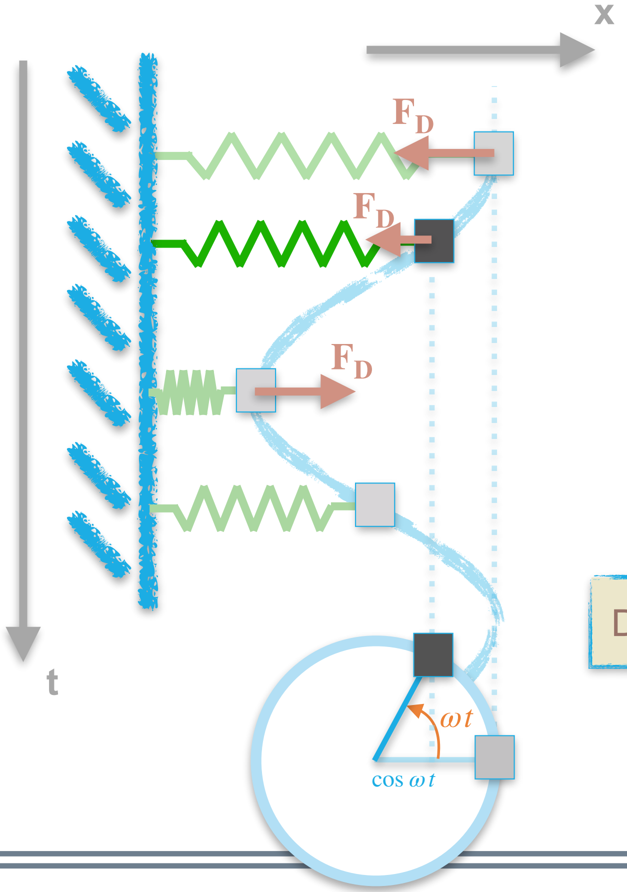
$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

??



$$E_{Feder} \longleftrightarrow E_{kin} \longleftrightarrow E_{Feder}$$

Federpendel und harmonische Schwingung



Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} = F_D = -\,D\,x$$

Harmonische Schwingung: $F_D \sim x$

Allgemeine Form der Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} = -\,\omega_0^2\,x \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Eigenfrequenz ω_0

gegeben durch Pendel

DGL lösen!

Allgemeine Lösung der DGL:

$$x\,(t) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right)$$

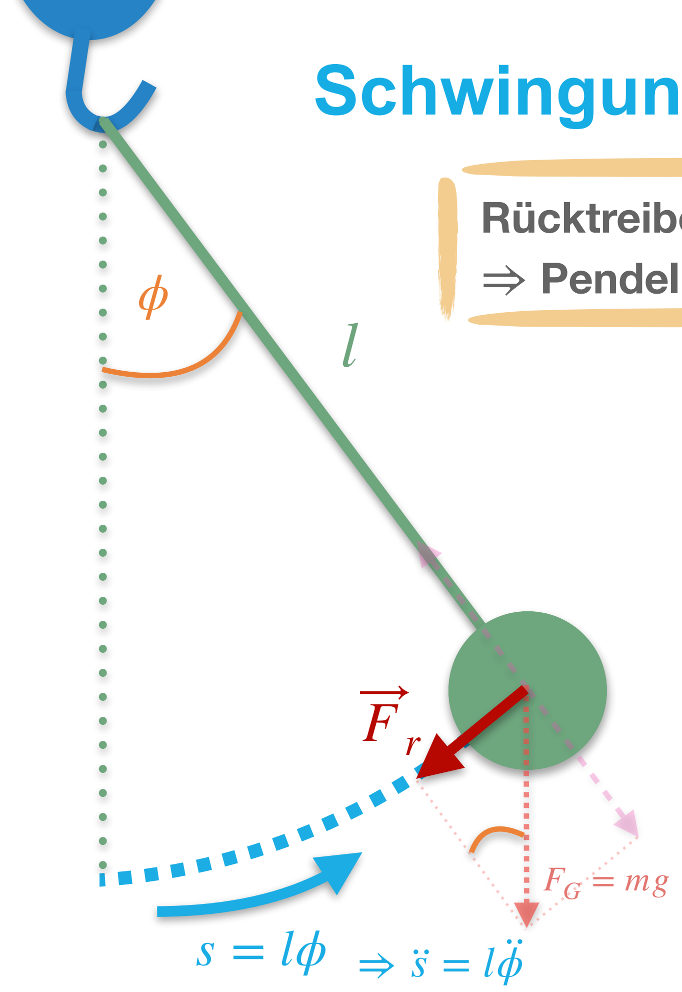
oder $x\,(t) = x_{max}\,\cos\left(\omega_0 t + \phi_0\right)$

Amplitude x_{max}

gegeben durch Anfangsbedingungen

Spick!

Schwingung eines Fadenpendels



Rücktreibende Kraft beschleunigt immer in Richtung Ruhelage.
$\Rightarrow$ Pendel schwingt hin und her

Bewegungsgleichung

Benutze Newton II für Pendelmasse: $m\ddot{s} = -\left|F_r\right|$

$F_r = mg\sin\phi$
$\ddot{s} = l\ddot{\phi}$

Einsetzen führt auf Bewegungsgleichung $ml\ddot{\phi} = -mg\sin\phi$

Näherung für kleine Winkel $\quad \sin\phi \approx \phi$

Ergibt Bewegungsgleichung $\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0$

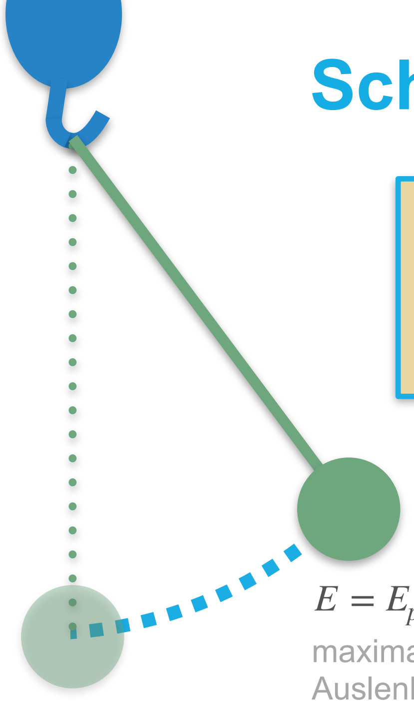
$\Rightarrow$ “Harmonische” Schwingung:
Rücktreibende Kraft proportional zu Auslenkung

ENGAGING PHYSICS TUTORING EPT

Schwingungen und Energieerhaltung

Gesamtenergie bleibt erhalten

aber: pendelt zwischen potentieller und kinetischer Energie



$E = E_{pot}$

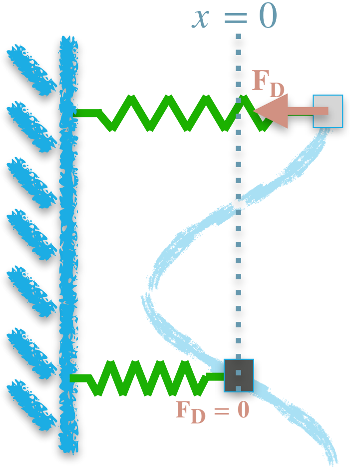
maximale Auslenkung

$E = E_{kin}$

maximale Geschwindigkeit

Fadenpendel

Federpendel



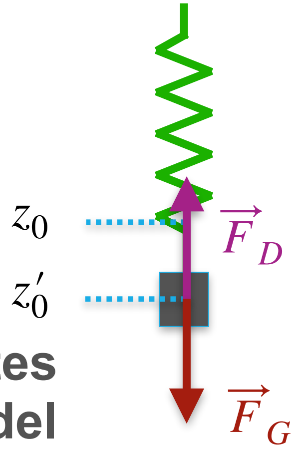
$$E = E_{pot} = \frac{1}{2} Dx^2$$

maximale Auslenkung

$$E = E_{kin} = \frac{1}{2} mv_{max}^2$$

maximale Geschwindigkeit

Senkrechtes Federpendel



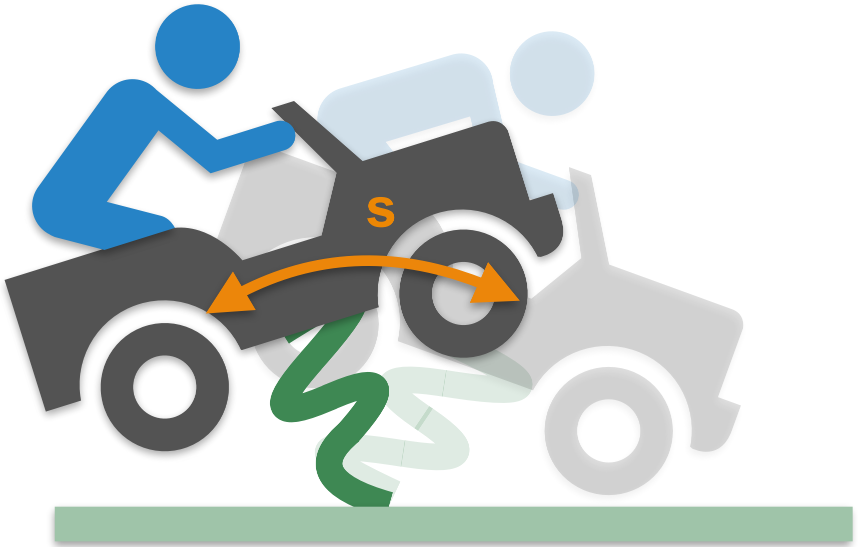
Ruhelage verschiebt sich nach unten (Kräftegleichgewicht)

$$z_0' = z_0 - \frac{mg}{D}$$

… dann analog zu horizontalem Pendel

Bewegungsgleichung aufstellen

Federwippe I



Zwei Kinder sitzen auf dem Spielplatz auf Federwippen.

Wir nehmen an, dass die Federn bei der kreisförmigen Auslenkung (Richtung **s(t)**) aus der Ruhelage eine Federkonstante von $\mathbf{D = 5}\ \mathrm{kN/m}$ haben.

Zusammen mit der Federwippe sind die Massen der Kinder $m_1 = 30\ \mathrm{kg}$ und $m_2 = 40\ \mathrm{kg}$.

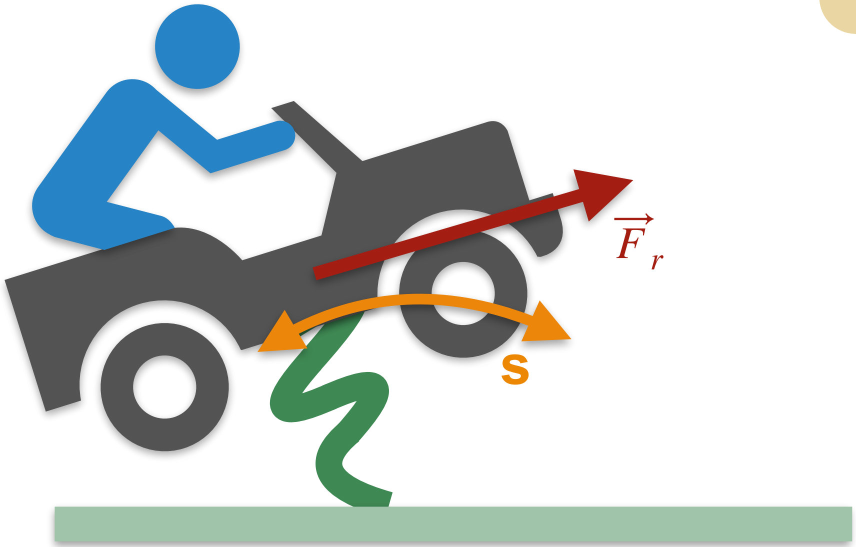
Beide Kinder springen so auf, dass sie aus der Ruhelage mit $v_0 = 5\ \mathrm{m/s}$ starten.

<u>Fragen:</u>

Wie sieht die Bewegungsgleichung der Schwingungen aus?

Welches schwingt schneller hin und her? (wie schnell?)

Federwippe I - Lösung



$\mathbf{D} = \mathbf{5}$ kN/m $\quad m_1 = 30$ kg

$v_0 = 5$ m/s $\quad m_2 = 40$ kg

Wie sieht die Bewegungsgleichung der Schwingungen aus?

$\Rightarrow$ Newton II

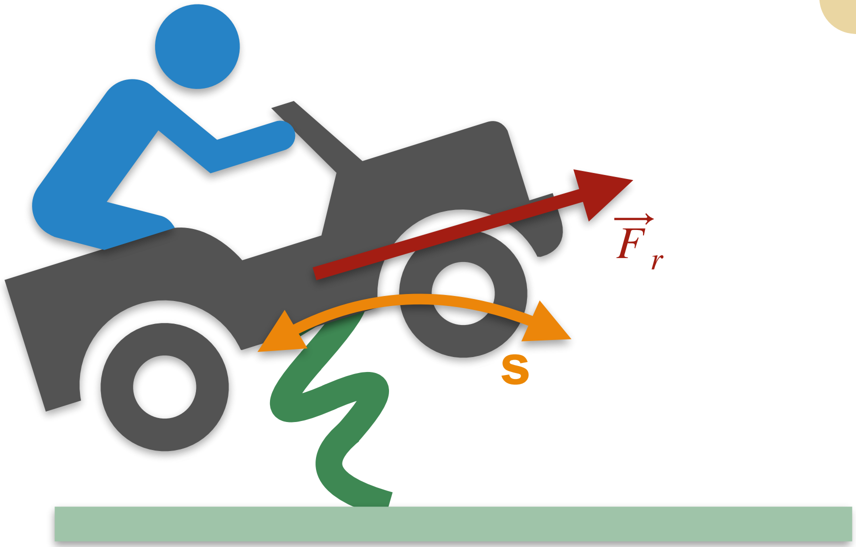
Rückstellkraft wirkt in Richtung s(t):

Welches Kind schwingt schneller hin und her? (wie schnell?)

Federwippe I - Lösung

Wie sieht die Bewegungsgleichung der Schwingungen aus?

$\Rightarrow$ **Newton II**



Rückstellkraft wirkt in Richtung s(t):

$$m\ddot{s} = F_r = -Ds$$
$$\Rightarrow \ddot{s} + \frac{D}{m}s = 0$$

Bewegungsgleichung für harmonischen Oszillator!

Welches Kind schwingt schneller hin und her? (wie schnell?)

Identifiziere Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

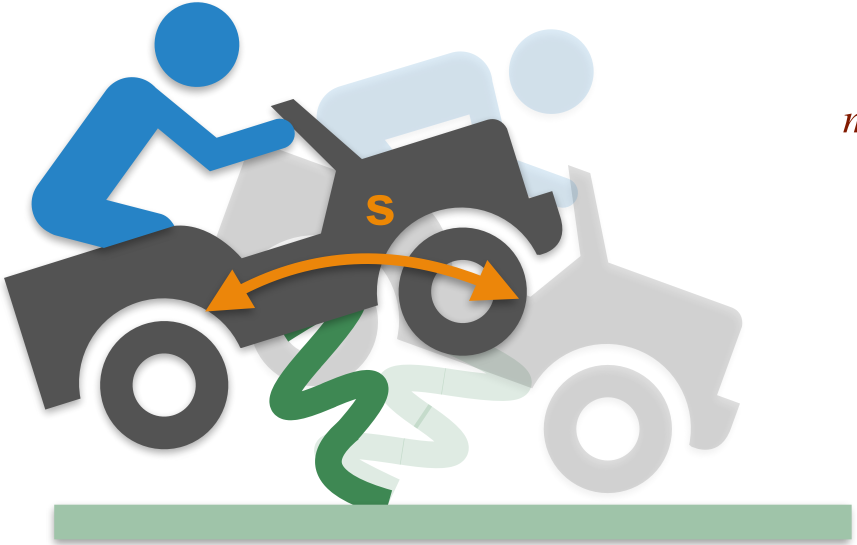
$\Rightarrow$ Das leichtere Kind schwingt mit höherer Frequenz

$\mathbf{D} = \mathbf{5}$ kN/m	$m_1 = 30$ kg
$v_0 = 5$ m/s	$m_2 = 40$ kg

Eine Periode der Schwingung dauert $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D}} = \frac{2\pi}{10}\ \mathrm{s} = 0.63\ \mathrm{s}$

Bewegungsgleichung lösen

Federwippe II



Zwei Kinder sitzen auf dem Spielplatz auf Federwippen.

$$m\ddot{s} = F_r = -Ds$$

$\mathbf{D = 5}$ kN/m	$m_1 = 30$ kg
$v_0 = 5$ m/s	$m_2 = 40$ kg

Bewegungsgleichung: $\ddot{s} + \omega_0 s = 0$

mit Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{D}{m}}$

Harmonischer Oszillator!

<u>Fragen:</u>

Durch welche Funktion werden die Auslenkungen s(t) beschrieben?

Welches Kind schwingt weiter aus? (wie weit?)

Federwippe II - Lösung

$\mathbf{D} = \mathbf{5}$ kN/m $\quad m_1 = 30$ kg

$v_0 = 5$ m/s $\quad m_2 = 40$ kg

$\ddot{s} + \omega_0 s = 0$

Durch welche Funktion werden die Auslenkungen s(t) beschrieben?

- Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung:
- Setze Anfangsbedingungen ein:

$\Rightarrow$ Schwingung entspricht Funktion

Welches Kind schwingt weiter aus? (wie weit?)

Federwippe II - Lösung

$\mathbf{D = 5}$ kN/m $\quad m_1 = 30$ kg

$v_0 = 5$ m/s $\quad m_2 = 40$ kg

$\ddot{s} + \omega_0 s = 0$

Durch welche Funktion werden die Auslenkungen s(t) beschrieben?

- Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung: $\mathbf{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$ **Spick!**

Amplitude der Schwingung

- Setze Anfangsbedingungen ein:

$$\mathbf{x(0) = 0} \quad \Rightarrow \mathbf{A = 0}$$

$$\mathbf{\dot{x}(0) = v_0} \quad \mathbf{v_0 = B\omega_0\cos(\omega_0 \cdot 0)} \quad \Rightarrow \mathbf{B = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0\sqrt{\frac{m}{D}}}$$

$\Rightarrow$ Schwingung entspricht Funktion $\mathbf{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

Welches Kind schwingt weiter aus? (wie weit?)

Beim schwereren Kind ist die Schwingungsamplitude B grösser.

Sie beträgt $\mathbf{B = v_0\sqrt{\frac{m}{D}} = 0.5}$ m

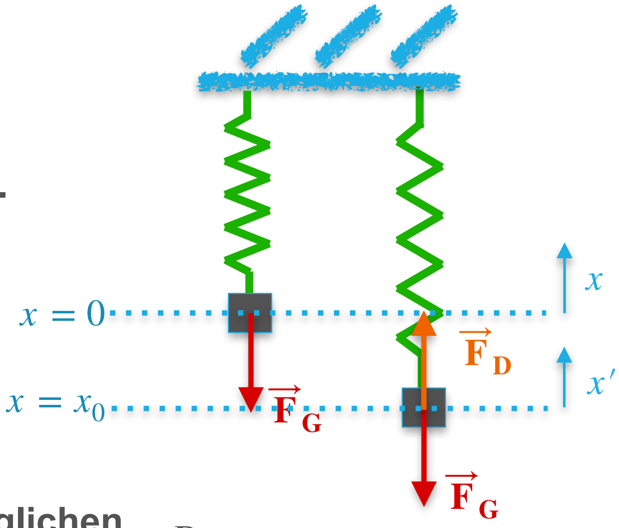
Bewegungsgleichung lösen

Federpendel mit Gravitation

Wird ein Federpendel (Masse m, Federkonstante D) aufgehängt, wirkt die Gewichtskraft auf die Masse und verschiebt die Ruhelage um eine Strecke x_0 nach unten.

Wie gross ist die Verschiebung x_0?

Tipp: Kräftegleichgewicht verwenden!

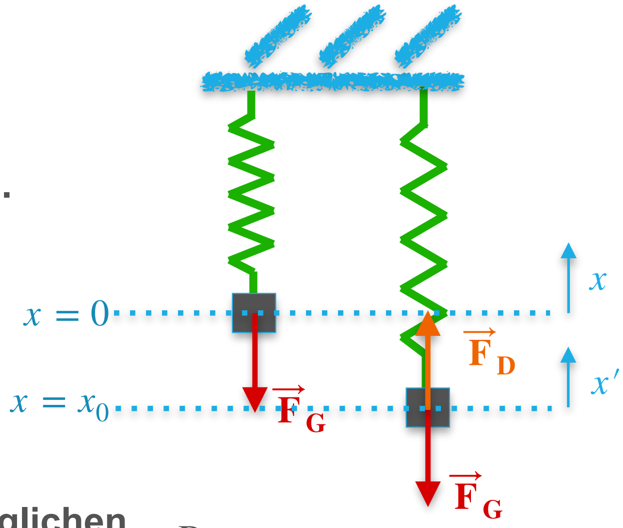


Bei Beschreibung der Auslenkung x relativ zur ursprünglichen Ruhelage verändert sich die Bewegungsgleichung zu $\ddot{x} = -g - \frac{D}{m}x$

Wie muss die Variable x' gewählt werden, um die Bewegungsgleichung $\ddot{x}' = -\frac{D}{m}x'$ **wiederherzustellen?**

Federpendel mit Gravitation

Wird ein Federpendel (Masse m, Federkonstante D) aufgehängt, wirkt die Gewichtskraft auf die Masse und verschiebt die Ruhelage um eine Strecke x_0 nach unten.



Wie gross ist die Verschiebung x_0?

Tipp: Kräftegleichgewicht verwenden!

$\vec{F}_G = -\vec{F}_D \qquad Dx_0 = -mg \qquad x_0 = -\dfrac{mg}{D}$

Bei Beschreibung der Auslenkung x relativ zur ursprünglichen Ruhelage verändert sich die Bewegungsgleichung zu $\ddot{x} = -g - \dfrac{D}{m}x$

Wie muss die Variable x' gewählt werden, um die Bewegungsgleichung $\ddot{x}' = -\dfrac{D}{m}x'$ wiederherzustellen?

Suche x', sodass $-g - \dfrac{D}{m}x =: -\dfrac{D}{m}x'$

Finde $x' = x + \dfrac{mg}{D} = x - x_0$, mit $\ddot{x}' = \ddot{x}$

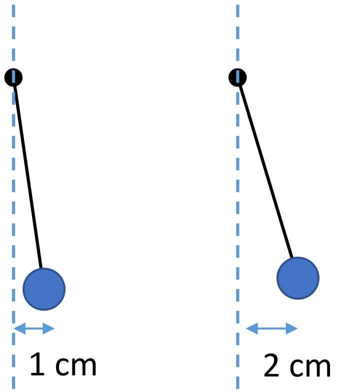
Dann gilt $m\ddot{x}' = -Dx'$

Clicker-Fragen

Frage 1

Ein Pendel schwingt 1 cm nach links (von der Ruhelage aus gesehen) und 1 cm nach rechts (von der Ruhelage aus gesehen). Dafür benötigt es ungefähr 2 s. Wie lange braucht das Pendel wenn die Amplitude verdoppelt wird, also 2 cm nach links und rechts?

a. 2 s
b. $\sqrt{2}$ s
c. 4 s
d. 8 s



Frage 1

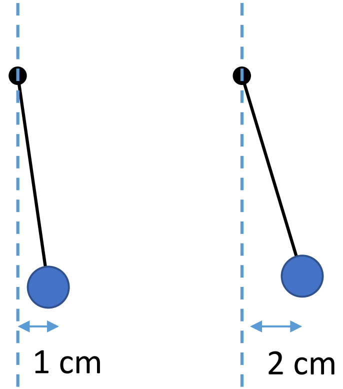
Ein Pendel schwingt 1 cm nach links (von der Ruhelage aus gesehen) und 1 cm nach rechts (von der Ruhelage aus gesehen). Dafür benötigt es ungefähr 2 s. Wie lange braucht das Pendel wenn die Amplitude verdoppelt wird, also 2 cm nach links und rechts?

a. 2 s
b. $\sqrt{2}$ s
c. 4 s
d. 8 s

Bei der harmonischen Schwingung ist die Frequenz (1/Periode) unabhängig von der Amplitude!

$$x(t) = A\cos(2\pi f \cdot t + \phi_0)$$

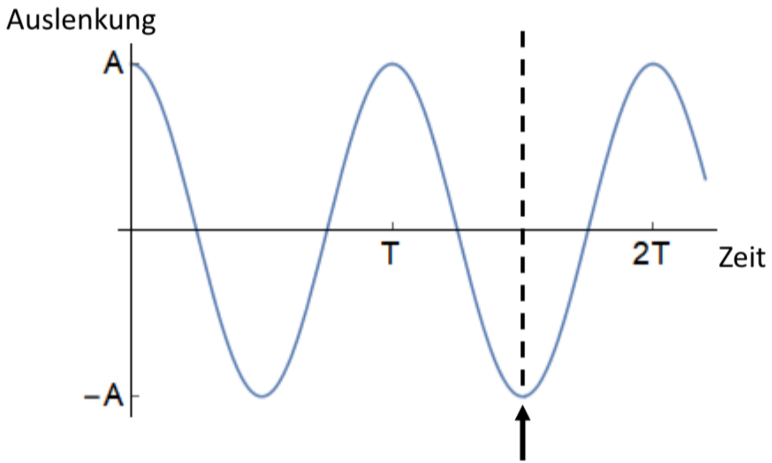
Wer möchte, kann hier noch auf Kleinwinkelnäherung eingehen.

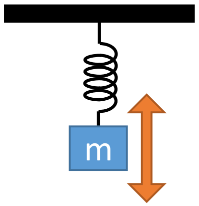


Frage 2

Eine Masse schwingt an einem Federpendel. Die Geschwindigkeit ist v_x und die Feder übt eine Kraft F_x aus. Am Zeitpunkt des Pfeiles gilt:

a) $v_x > 0$ und $F_x > 0$
b) $v_x < 0$ und $F_x = 0$
c) $v_x = 0$ und $F_x = 0$
d) $v_x = 0$ und $F_x > 0$



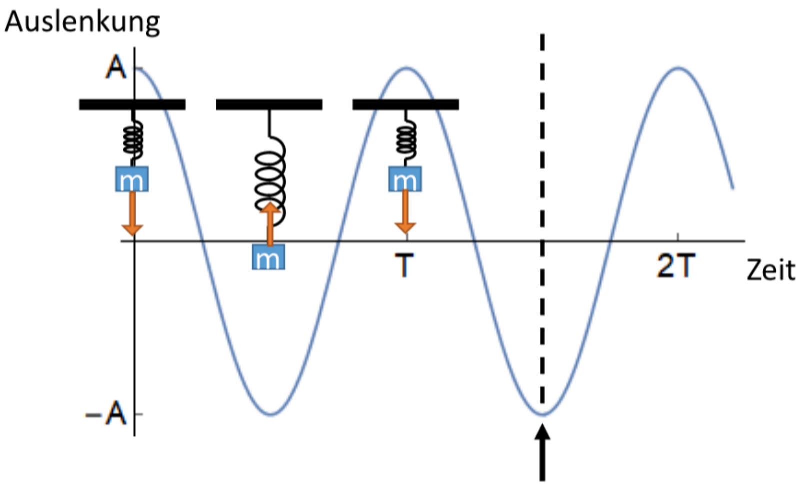


Frage 2

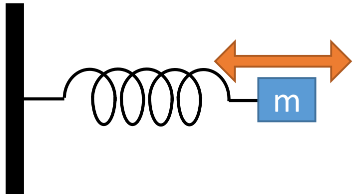
Die Geschwindigkeit muss = 0 sein, da der Pfeil am Umkehrpunkt der Schwingung ist. Die Feder zieht die Masse wieder nach oben (die Auslenkung steigt), d.h. Die Kraft muss in positive Richtung zeigen.

Eine Masse schwingt an einem Federpendel. Die Geschwindigkeit ist v_x und die Feder übt eine Kraft F_x aus. Am Zeitpunkt des Pfeiles gilt:

a) $v_x > 0$ und $F_x > 0$
b) $v_x < 0$ und $F_x = 0$
c) $v_x = 0$ und $F_x = 0$
d) $v_x = 0$ und $F_x > 0$

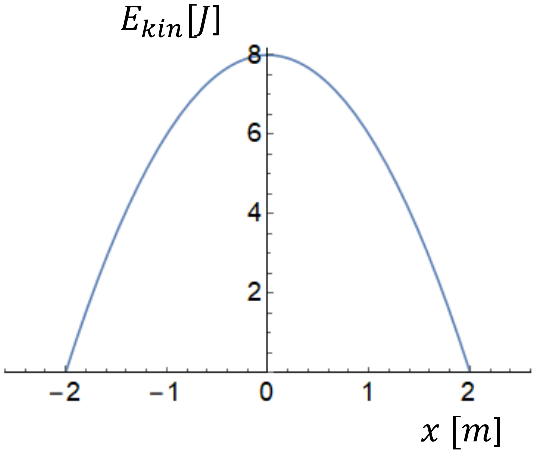


Frage 3



Gezeigt ist die kinetische Enregie eines langen Federpendels in Abhängigkeit der Auslenkung. Wie gross ist die Federkonstante?

a) 1 N/m
b) 2 N/m
c) 4 N/m
d) 8 N/m



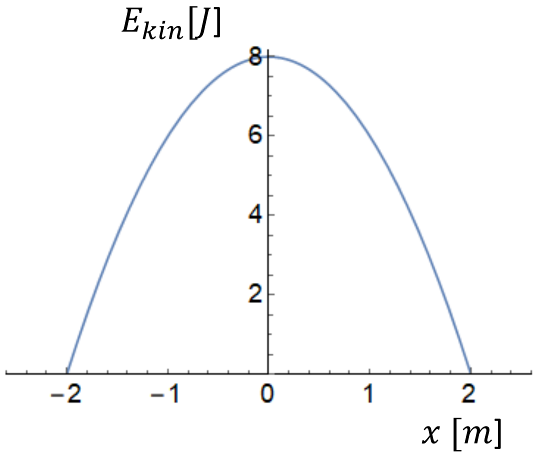
Frage 3

$E_{pot} = \frac{kx^2}{2}$ und es gilt wegen Energieerhaltung $E_{pot,max} = E_{kin,max} = 8\,J$

Also $\frac{\mathrm{kx}^2}{2} = 8J \rightarrow k = 4\,\frac{N}{m}$

Gezeigt ist die kinetische Enregie eines langen Federpendels in Abhängigkeit der Auslenkung. Wie gross ist die Federkonstante?

a) 1 N/m
b) 2 N/m
c) 4 N/m
d) 8 N/m

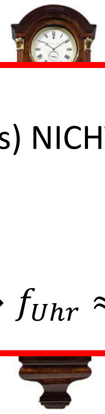


Frage 4

Warum sind alte Pendeluhren eigentlich so gross?

a. Zwei Schläge pro Sekunde, also muss das Pendel eine Länge von ca. 1 m haben.
b. Zwei Schläge pro Sekunde, also muss das Pendel eine Masse von ca. 10 kg haben.
c. Damals war die Herstellung von kleinen Uhren nicht machbar. Eigentlich ist die Grösse des Pendels egal, da alle Massen gleich schnell fallen und somit auch pendeln.
d. Zwei Schläge pro Sekunde, also muss die Schwingungsamplitude in X-Richtung ca. 1 m sein.

Frage 4



Nicht b), weil Periode unabhängig von Masse!
Nicht c), weil Grösse des Pendels (also die Länge des Pendelarms) NICHT egal ist! Periode steigt mit der Länge des Pendelarms!
Nicht d), weil Periode unabhängig von Auslenkung!

Zu a): $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \omega_{Uhr} \approx \sqrt{\frac{10\frac{m}{s^2}}{1m}} \approx 3.16\frac{rad}{s}\ und\ f_{Uhr} = \frac{\omega_{Uhr}}{2\pi} \rightarrow f_{Uhr} \approx 0.5s$

Warum sind alte Pe

a. Zwei Schläge pro Sekunde, also muss das Pendel eine Länge von ca. 1 m haben.

b. Zwei Schläge pro Sekunde, also muss das Pendel eine Masse von ca. 10 kg haben.

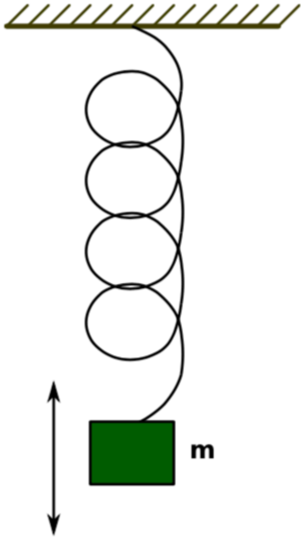
c. Damals war die Herstellung von kleinen Uhren nicht machbar. Eigentlich ist die Grösse des Pendels egal, da alle Massen gleich schnell fallen und somit auch pendeln.

d. Zwei Schläge pro Sekunde, also muss die Schwingungsamplitude in X-Richtung ca. 1 m sein.

Weitere Konzeptfragen

Die folgenden Fragen sind extrahiert von
“Konzeptfragen zur Newtonschen Mechanik und Thermodynamik”
von Rafael Gort

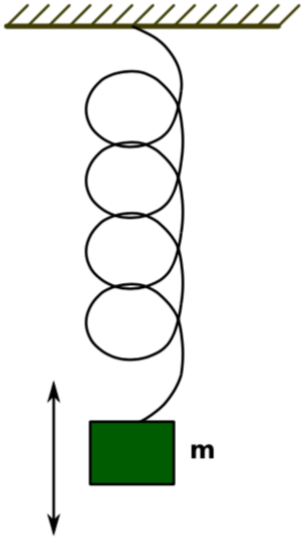
Frage 5



Eine Masse schwingt wie in der Darstellung gezeigt. In welche Richtung zeigen Kraft und Geschwindigkeit am tiefsten Punkt der Schwingung?

1. v nach oben, F nach oben
2. v nach unten, F nach unten
3. $v = 0$, F nach oben
4. $v = 0$, F nach unten
5. keine der obigen Antworten

Frage 5



Eine Masse schwingt wie in der Darstellung gezeigt. In welche Richtung zeigen Kraft und Geschwindigkeit am tiefsten Punkt der Schwingung?

Antwort: 3. $v = 0$, F nach oben

Kurz vor dem tiefsten Punkt ist die Geschwindigkeit der Schwingung negativ. Darauf wird sie Null und anschliessend positiv. Am tiefsten Punkt der Schwingung ist die Geschwindigkeit also Null, und die Beschleunigung positiv. Dies bedeutet die Kraft zeigt in positive Richtung (nach oben).

Frage 6

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Schwingung angeregt. Zu diesem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit der Schwingung Null und die Auslenkung x_m maximal. Die Formel für eine einfache harmonische Schwingung lautet:

$$x(t) = x_\mathrm{m} \cos(\omega t + \phi)$$

Was ist der Wert der Phase ϕ?

1. 0
2. $+\frac{\pi}{4}$
3. $-\frac{\pi}{4}$
4. $+\frac{\pi}{2}$
5. $-\frac{\pi}{2}$
6. keine der obigen Antworten

Frage 6

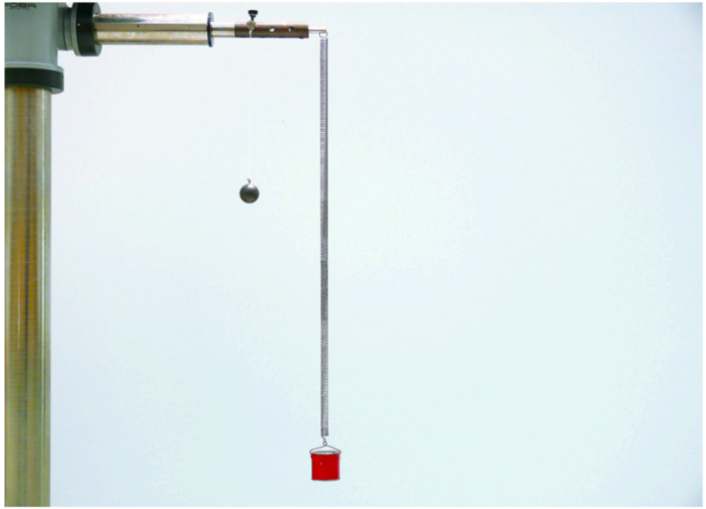
Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Schwingung angeregt. Zu diesem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit der Schwingung Null und die Auslenkung x_{m} maximal. Die Formel für eine einfache harmonische Schwingung lautet:

$$x(t) = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi)$$

Was ist der Wert der Phase ϕ?

1. 0
2. $+\frac{\pi}{4}$
3. $-\frac{\pi}{4}$
4. $+\frac{\pi}{2}$
5. $-\frac{\pi}{2}$
6. keine der obigen Antworten

Frage 7



Man hat, wie in der Abbildung gezeigt, ein Fadenpendel und ein Federpendel. Die Feder hat eine Federkonstante k. An beiden Pendeln hängt die gleiche Masse m. Wie lange muss das Fadenpendel sein, damit die Pendel die gleiche Schwingungsperioden haben?

1. Die Pendel müssen sicher die gleiche Länge haben.
2. $l \propto k/m$
3. $l \propto m/k$
4. kann man mit diesen Informationen nicht sagen.

Frage 7

Antwort: 3. $l = gm/k$

Die Schwingungsperioden für Faden und Federpendel lauten:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad , \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Durch Gleichsetzen folgt die obige Beziehung. Zu beachten ist, dass die Schwingungsperiode des Fadenpendels nicht von der Masse abhängt. Die Massenabhängigkeit entsteht aufgrund des Federpendels.

Man hat, wie in der Abbildung gezeigt, ein Fadenpendel und ein Federpendel. Die Feder hat eine Federkonstante k. An beiden Pendeln hängt die gleiche Masse m. Wie lange muss das Fadenpendel sein, damit die Pendel die gleiche Schwingungsperioden haben?

1. Die Pendel müssen sicher die gleiche Länge haben.
2. $l \propto k/m$
3. $l \propto m/k$
4. kann man mit diesen Informationen nicht sagen.