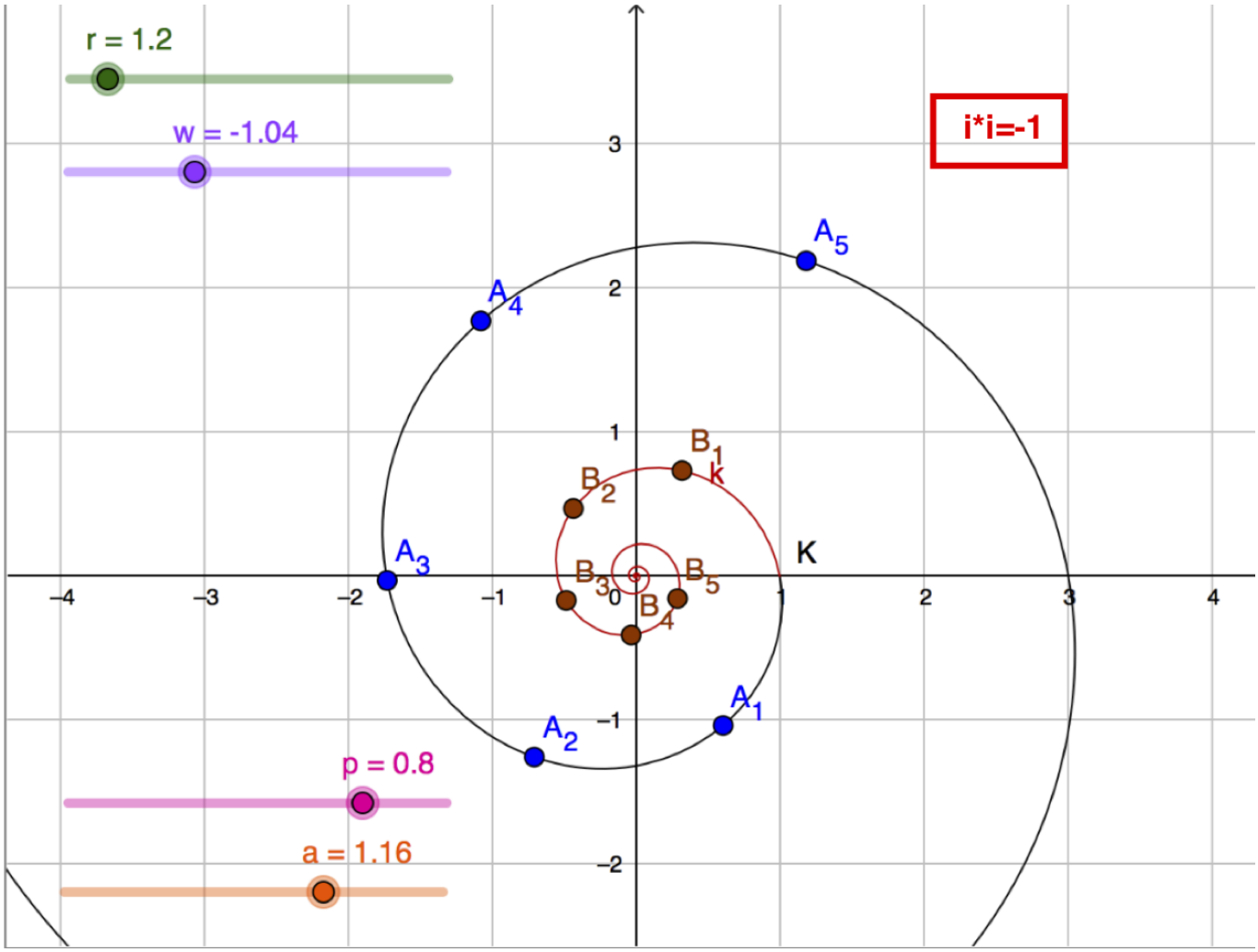
Flipped Classroom: Komplexe Zahlen



Flipped Classroom: Komplexe Zahlen

Flipped Classroom: Komplexe Zahlen

Akka, Akveld, Caspar, Keller, Steiger

Meike Akveld, Alexander Caspar, Laura Keller, and Andreas Steiger

Flipped Classroom: Komplexe Zahlen Copyright © 2018 by Akka, Akveld, Caspar, Keller, Steiger. All Rights Reserved.

Contents

Content 8
- Einführung 9
- Rechenoperationen 15
- Die komplexe Ebene - eine geometrische Darstellung der komplexen Zahlen 20
- Polarkoordinaten 27
- Gleichungen mit komplexen Zahlen 52
- Fundamentalsatz der Algebra 55

Content

1

Einführung

1.1 – Warum komplexe Zahlen? Erweiterung der Zahlenbereiche im Hinblick auf die Lösbarkeit von Gleichungen

Wir sind bereits den natürlichen Zahlen, den ganzen Zahlen, den rationalen Zahlen und schliesslich auch den reellen Zahlen begegnet. Aber die reellen Zahlen sind nicht das Ende dieser „Reise“. Jedes Mal, wenn wir den Zahlenbereich erweitert hatten, hatten wir einen guten Grund dafür. Im Folgenden werden wir nochmals kurz diese Erweiterungen der Zahlenbereiche in Hinblick auf die Lösbarkeit von Gleichungen betrachten.

Leopold Kronecker 1823-1891

Die natürlichen Zahlen hat uns der liebe Gott gegeben, alles andere ist Menschenwerk.

Was war bis jetzt dieses Menschenwerk? Wie haben wir den Zahlenbereich von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ erweitert? Was war der Grund für jede weitere Erweiterung? Von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$, weil wir subtrahieren wollten, oder anders gesagt, weil wir

$$x + 3 = 0$$

lösen wollten. Dann von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$, weil wir dividieren wollten, oder anders gesagt, weil wir

$$2x - 3 = 0$$

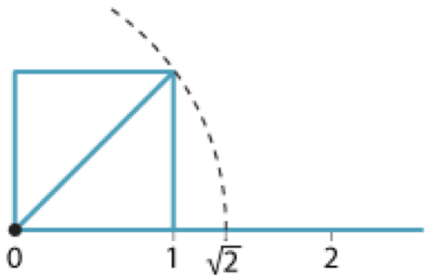
lösen wollten. Dann von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$, weil wir zum Beispiel Wurzel ziehen wollten, oder anders gesagt,

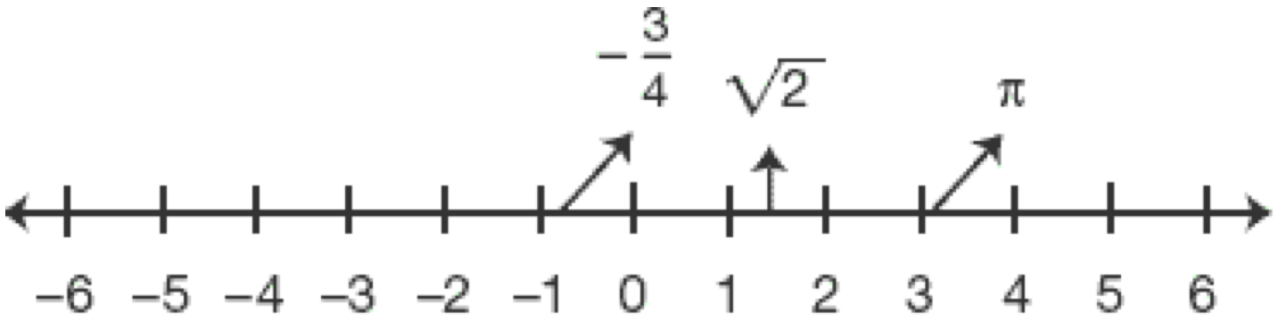
$$x^2 - 3 = 0$$

lösen wollten. Allmählich haben wir verstanden, dass die Zahlengerade voller Lücken ist, wie ein Schweizer Käse. Wir haben diese Lücken gefüllt und damit die reellen Zahlen bekommen.

Bisher waren diese Erweiterungen ziemlich leicht zu erfinden und vorzustellen, denn diese Zahlen haben Platz auf der Zahlengeraden und damit können wir sie einfach veranschaulichen.

Rationale und irrationale Zahlen auf der Zahlengerade





Jetzt kommt aber etwas Merkwürdiges. Wir können die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{oder } x^2 = -1$$

nicht lösen. Diese Tatsache ist leicht einzusehen, weil Quadrate immer positiv sind! Man darf keine Wurzel aus negativen Zahlen ziehen, oder? Dennoch haben Mathematiker im 16. Jahrhundert entdeckt, dass sie, um eine Formel für Gleichungen dritten oder vierten Grades formulieren zu können, die Wurzel aus negativen Zahlen ziehen müssen. (Sogar wenn sie wussten, dass die Lösung der Gleichung reell ist!) Das war für sie verblüffend, aber trotzdem haben sie das Folgende gemacht, und wir werden ihnen folgen.

Definition

Wir definieren eine neue Zahl, deren Quadrat minus 1 ist. Diese Zahl bezeichnen wir mit i, wobei i für imaginär steht. Manchmal schreibt man diese Zahl auch als $\sqrt{-1}$, aber wir werden diese Schreibweise vermeiden.

Bemerkung

Es ist wichtig zu betonen, dass $\sqrt{2}$ genauso eine Erfindung war wie i. Der Unterschied ist, dass $\sqrt{2}$ einen Platz auf der Zahlengeraden hat, während i dort keinen Platz findet! Und deshalb nannten die Mathematiker des 16. Jahrhunderts diese Zahl *imaginär*. Etwa fünfzig Jahre später haben drei Mathematiker gleichzeitig und unabhängig voneinander den richtigen „geometrischen“ Platz für i gefunden – die komplexe Ebene. Wir werden sie später einführen.

Wir haben also eine Lösung für die obige Gleichung, nämlich i, weil

$$i^2 = -1$$

per Definition gilt.

Wie lösen wir jetzt $x^2 = -2$? Sollen wir eine neue Zahl erfinden, dessen Quadrat -2 ist? Aber nein! Wir können i mit $\sqrt{2}$ multiplizieren erhalten dann

$$\left(\sqrt{2} \cdot i\right)^2 = \sqrt{2}^2 i^2 = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Die Zahlen$\sqrt{2}i$ und$i$ sind erste Beispiele von komplexen Zahlen. Können wir auch andere Polynomgleichungen mit anderen komplexen Zahlen lösen?

Es gilt eine erstaunliche Tatsache: Mit komplexen Zahlen lassen sich nicht nur Wurzeln ziehen, sondern **jede Polynomgleichung** findet in den komplexen Zahlen ihre Nullstellen. Das ist der Inhalt des berühmten „Fundamentalsatzes der Algebra“, den wir im Kapitel besprechen werden. Wer nicht warten kann, kann die folgende Aufgabe schon jetzt lösen:

Aufgabe

Das Polynom $x^2 - 2x + 3$ hat keine reellen Nullstellen. Durch die quadratische Ergänzung zeigen Sie, dass man eine Nullstelle davon als $1 + i\sqrt{2}$ schreiben kann. Die Lösung dieser Aufgabe finden Sie im Abschnitt 5.1 des Buches Arens, Tilo and Hettlich, Frank and Karpfinger, Christian and Kockelkorn, Ulrich and Lichtenegger, Klaus and Stachel, Hellmuth: Mathematik *(Springer-Verlag, 2015)*. Alternativ können Sie ein Computerprogramm zu Hilfe nehmen.

Im Hinblick auf die Lösbarkeit von Gleichungen, sind die komplexen Zahlen also das Ende der

Geschichte.

Nun folgt die konkrete Definition der komplexen Zahlen an.

1.2 – Definition der komplexen Zahlen

Zuerst soll man an komplexe Zahlen wie an Symbole mit einer bestimmten Form denken, die man addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann – wie wir sehen werden. Gleichzeitig werden wir sehen, dass die komplexen Zahlen auch eine geometrische Bedeutung haben, und bilden daraus eine nützliche Erweiterung der reellen Zahlen.

Definition

Ausdrücke der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heissen *komplexe Zahlen.*

Die Menge der komplexen Zahlen notieren wir mit

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Eine komplexe Zahl ist durch zwei reelle Zahlen a und b gegeben. Diese reellen Zahlen haben einen speziellen Namen.

Definition

Sei $a + bi$ eine komplexe Zahl. Die reelle Zahl a heisst der <u>Realteil</u> von z, und man bezeichnet ihn mit $\mathrm{Re}(z)$. Die reelle Zahl b heisst der <u>Imaginärteil</u> von z, und man bezeichnet ihn mit $\mathrm{Im}(z)$.

Beispiele

$\mathrm{Re}(3 + 2i) = 3$ und $\mathrm{Im}(3 + 2i) = 2$.

$\mathrm{Re}(5 - 8i) = 5$ und $\mathrm{Im}(5 - 8i) = -8$.

Wir identifizieren die reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit der komplexen Zahl $a + 0i$. Dann sind die reellen Zahlen eine Teilmenge der komplexen Zahlen, das heisst $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Die komplexe Zahl $a + 0i$ schreiben wir einfach als a. Analog schreiben wir

$$bi = 0 + bi$$

und solche Zahlen heissen rein imaginäre Zahlen.

Aufgabe

Welche komplexen Zahlen sind sowohl reell als auch rein imaginär?

Beispiel

$\mathrm{Re}(2) = 2$ und $\mathrm{Im}(2) = 0$.

$\mathrm{Re}(2i) = 0$ und $\mathrm{Im}(2i) = 2$.

Bemerkung

Der Real- und Imaginärteil einer Zahl bestimmen die komplexe Zahl. In der Mathematik nennen wir diese Eigenschaft Eindeutigkeit und formulieren sie so:

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ und } b = d.$$

Man erkennt also eine komplexe Zahl eindeutig an ihrem Real- und Imaginärteil. Noch anders gesagt sind zwei komplexe Zahlen genau dann gleich, wenn sowohl ihr reeller als auch ihr imaginärer Teil identisch sind.

$$\forall z, w \in \mathbb{C}\, z = w \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \text{ und } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w).$$

Diese Bemerkung mag etwas umständlich erscheinen. Sie kann uns aber helfen, wenn wir Gleichungen lösen. Dazu hier ein sehr einfaches Beispiel:

Beispiel

Die Lösungen von

$$2x + 3yi = 2 + 6i$$

sind $2x = 2$ und $3y = 6$ bzw. $x = 1$ und $y = 2$.

Um unsere Einführung zu beenden, lassen Sie uns wiederholen, dass der Inhalt des berühmten „Fundamentalsatzes der Algebra“ Folgendes ist: Man kann mit Ausdrücken der Form

$$a + b \cdot i, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

die Lösungen jeder Polynomgleichung beliebigen Grades finden.

Diesen Satz besprechen wir in Kapitel . Im Hinblick auf die Lösbarkeit von Gleichungen, sind die komplexen Zahlen also das Ende der Geschichte. Wer noch mehr über die Geschichte der komplexen Zahlen erfahren möchte, kann in den „In our time“-Podcast (LINK) schauen.

<!– post meta –>

2

Rechenoperationen

Die Rechenoperationen mit komplexen Zahlen versteht man besser, wenn man diese zusammen mit ihren geometrischen Veranschaulichungen betrachtet. Das ist der Zweck dieses und des nächsten Abschnitts.

Zunächst wollen wir klären, wie man rechnerisch diese Rechenoperationen durchführt. Dies lässt sich einfach so zusammenfassen:

Mit komplexen Zahlen rechnen wir wie gewohnt unter Berücksichtigung, dass $i^2 = -1$ gilt.

Das heisst, wir könnten so tun, als ob i eine Variabel wäre, und wann immer wir i^2 sehen, setzen wir -1 ein. Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnungen $z = a + bi$ und $w = c + di$.

2.1 - Addition

Wir wollen die Summe

$$z + w = (a + ib) + (c + id)$$

als

$$A + B \cdot i$$

darstellen, wobei A und B reelle Zahlen sind. Dafür addieren wir die Zahlen, die nicht mit i multipliziert werden, und diejenigen Zahlen, welche mit i multiplizieren werden, zusammen und erhalten

$$\underbrace{(a + c)}_{\text{reelle Zahl}} + \underbrace{(b + d)}_{\text{reelle Zahl}} i.$$

Beispiel

$$(3 - 4i) + (-2 + i) = (3 - 2) + (-4 + 1)i = 1 - 3i$$

2.2 - Subtraktion

Ganz kurz: Beim Subtrahieren gibt es keine Überraschungen. Es gilt

$$(a + ib) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Offensichtlich sind a, b, c und d nur reelle Zahlen, aber nicht notwendigerweise positive!

2.3 – Multiplikation

Wir wollen das Produkt $z \cdot w$ als

$$z \cdot w = A + B \cdot i$$

darstellen, wobei A und B reelle Zahlen sind. Ohne Angst multiplizieren wir, wie wir es kennen:

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = ac + aid + ibc + ibid$$

Dann öffnen wir die Klammern, sortieren und zählen ähnliche Terme zusammen. Dann erhalten wir

$$ac + (ad + bc)i + bdi^2 = z \cdot w$$

Jetzt erinnern wir uns daran, dass gilt $i^2 = -1$.

Schlussendlich bekommen wir

$$ac + (ad + bc)i - bd = \underbrace{(ac - bd)}_{\text{reelle Zahl}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\text{reelle Zahl}} i.$$

Eigentlich *definiert* man so die Addition und die Multiplikation, aber das interessiert uns nicht wirklich. Wir wollen wissen, wie man mit diesen Zahlen rechnen soll, und das schaffen wir auch so.

Beispiel

$$\begin{aligned}(3 - 4i) \cdot (-2 + i) &= 3 \cdot (-2) + 3 \cdot i + (-4i) \cdot (-2) + (-4i) \cdot i = \\ &- 6 + 3i + 8i - 4i^2 = -6 + 11i - 4(-1) = -2 + 11i\end{aligned}$$

Übungen zur Addition, Subtraktion und Multiplikation

Verwenden Sie folgende Links, um sich mit den Rechenregeln für komplexe Zahlen vertraut zu machen. Üben Sie so lange, bis Sie „fliessend“ rechnen können!

- Addieren und Subtrahieren von komplexen Zahlen
- Multiplizieren von komplexen Zahlen

2.4 – Division

Von den vier Grundrechenarten haben wir drei bereits behandelt. Es fehlt noch die Division. Wie wir komplexe Zahlen dividieren, wird im folgenden Video erklärt.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=23

Übungen zur Division

Verwenden Sie folgenden Link, um sich mit den Rechenregeln für komplexe Zahlen vertraut zu machen. Üben Sie so lange, bis Sie „fliessend“ rechnen können!

- Dividieren mit komplexen Zahlen

Um die Division zu erklären, stellen wir zuerst eine einfache, aber sehr wichtige Definition auf.

Definition

Zu einer Zahl $z = a + bi$ definieren wir die *komplex konjugierte Zahl*

$\bar{z} = a - bi.$

Man sagt „z quer“ oder „z konjugiert“. Die komplexe Konjugation besteht also allein im Umdrehen des Vorzeichens des Imaginärteils.

Beachten Sie, dass das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer Konjugierten eine *reelle* Zahl ist:

$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$

Das hilft dabei, die Division durchzuführen: Man muss einfach den Bruch mit dem konjugierten Nenner erweitern.

Beispiel

Hier möchte man durch $-2+i$ dividieren und das Ergebnis in der Form $A+Bi$ schreiben, wobei A und B reelle Zahlen sind. Man erweitert mit dem konjugierten Nenner.

$$\begin{aligned}\frac{5+15i}{-2+i} &= \frac{(5+15i)\cdot(-2-i)}{(-2+i)\,(-2-i)}\\ &= \frac{-10-5i-30i-15i^2}{\underbrace{(-2)^2+1^2}_{4-i^2}} = \frac{5-35i}{5} = 1-7i\end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{a+bi}{c+di} =\\ &= \frac{(a+bi)\,(c-di)}{(c+di)\,(c-di)} =\\ &= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} =\\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

Bemerkung

Der letzte Teil dieser Berechnung ist überflüssig! Man muss den Trick lernen, nicht die Formel! An diesem einfachen Beispiel zeigt sich deutlich, worauf man beim Lernen achten soll. Natürlich können Sie diese Formel auswendig lernen. Aber es ist viel sinnvoller zu verstehen, wie man durch die Erweiterung des Bruches den Nenner reell macht. Dann wird das Auswendiglernen überflüssig.

Hier ist das **Fazit**:

Um die Division bei komplexen Zahlen durchzuführen, erweitern wir den Bruch mit dem konjugierten Nenner.

Bemerkung

Konjugieren ist eine nützliche Operation. Hier sind einige Eigenschaften.

1. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \bar{z}$.

2. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ und $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Um 3. und 4. zu beschreiben, sagt man: „Konjugation kommutiert mit Addition und Multiplikation“.

Die Beweise dieser Eigenschaften sind einfach.

Zum Beispiel beweisen wir Eigenschaft 4:

Seien $z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id$, wobei a, b, c, d beliebige reelle Zahlen sind. Wir berechnen beide Seiten von 4:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{ac - bd + (ad+bc)i} = ac - bd - (ad+bc)i$
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{(a+ib)} \cdot \overline{(c+id)} = (a-ib)(c-id) = ac - bd - (ad+bc)i.$
Wie wir nun sehen, stimmen rechte und linke Seite von 4 tatsächlich überein.

Den Beweis der Eigenschaft 3 überlassen wir Ihnen.

3

Die komplexe Ebene - eine geometrische Darstellung der komplexen Zahlen

Wie bereits erwähnt, waren alle Erfindungen wie negative Zahlen, irrationale Zahlen und so weiter leichter als komplexe Zahlen zu akzeptieren, vielleicht, weil sie Platz auf der Zahlengeraden fanden, und man sie so relativ leicht visualisieren kann (man konnte sie „sehen“). Das ist nicht offensichtlich der Fall für komplexe Zahlen, was zuerst etwas schwer zu verstehen ist.

Man hat komplexe Zahlen verwendet, weil sie sehr nützlich waren, aber eher zähneknirschend. Wo ist der natürliche Platz von i? Diese drei Mathematiker haben gleichzeitig und unabhängig die folgende Darstellung gefunden/erfunden.

Jean-Robert Argand

1768-1822

Caspar Wessel

1745 -1818

Carl Friedrich Gauss

1777-1855

Sie sagten: „Ach, es gibt keinen Platz auf der Zahlengerade, also fügen wir eine neue Gerade hinzu!“

Da Real- und Imaginärteil voneinander unabhängig sind, fassen wir beide als kartesische Koordinaten in einer Ebene auf, der *komplexen Zahlenebene*. So können wir uns jede komplexe Zahl als einen Punkt in dieser Ebene vorstellen. Den Realteil fassen wir als x-Koordinate auf und die x-Achse wird dann die „Realachse“ (reelle Achse) genannt. Den Imaginärteil fassen als y-Koordinate auf und die y-Achse wird die „Imaginärachse“ (imaginäre Achse) genannt.

Verwenden Sie folgendes Applet, um die Darstellung von komplexen Zahlen als Punkte in der Ebene zu verstehen.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=24

Applet Darstellung Komplexer Zahlen

Das oben erwähnte Applet finden Sie unter dem folgenden externen Link.

Fazit: Stellen Sie sich ab jetzt komplexe Zahlen gleichzeitig als Zahl (das heisst, als algebraische Ausdrücke der Form $a + bi$) als auch als Punkt/Vektor in der Ebene vor. Durch diese Darstellung können wir die bereits vorgestellten Begriffe veranschaulichen und auch Neues definieren.

Das folgende Video fasst die eben vorgestellt Darstellung komplexer Zahlen nochmals zusammen und zeigt auf, wie die Rechenoperationen geometrisch veranschaulicht werden können.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=24

Übungen zur komplexen Zahlenebene

Verwenden Sie den folgenden Link, um sich mit den Rechenregeln für komplexe Zahlen vertraut zu machen. Üben Sie so lange, bis Sie „fliessend“ rechnen können!

- Die Ebene der komplexen Zahlen

3.1 – Der Betrag einer komplexen Zahl

Ebenso wie im reellen Zahlenbereich können wir auch von einer komplexen Zahl $z = a + bi$ den Betrag $|z|$ als Abstand vom Nullpunkt einführen.

Definition

Der *Betrag* einer komplexen Zahl z ist der Abstand zwischen z und dem Nullpunkt. Man bezeichnet ihn mit $|z|$.

Wie berechnen wir den Betrag einer Zahl $z = a + bi$? Nach Pythagoras erhalten wir

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}.$$

In diesem Zusammenhang lohnt es sich, sich eine komplexe Zahl z auch als Vektor oder Pfeil vorzustellen, wie wir das im Video schon gesehen haben.

Verwenden Sie folgendes Applet, um den Begriff des Betrags in den Griff zu bekommen:

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=24

Applet Betrag

Das oben erwähnte Applet finden Sie unter dem folgenden externen Link.

Übungen zum Betrag einer komplexen Zahl

Verwenden Sie den folgenden Link, um sich mit den Rechenregeln für komplexe Zahlen vertraut zu machen. Üben Sie so lange, bis Sie „fliessend“ rechnen können!

- Der Betrag einer komplexen Zahl

Aufgabe

Welche dieser Aussagen ist wahr?

1. $\forall x \in \mathbb{C} \quad |x|^2 = x^2$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x|^2 = x^2$

Allgemeiner gilt, dass $|z_1 - z_2|$

den Abstand zwischen z_1 und z_2 darstellt.

Zum Beispiel ist der Abstand zwischen $1 + i$ und -2

$$|(1 + i) - (-2)| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Aufgabe

Die Aussage „Die Menge $\{z \in C : |z - z_0| = 16\}$ beschreibt einen Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt z_0“ ist

1. wahr.
2. falsch.

Allgemeiner gilt

- $|z - z_0| = R$ beschreibt einen Kreis mit Radius R und Zentrum z_0,
- $|z - z_0| < R$ beschreibt das Innere dieses Kreises,
- $|z - z_0| > R$R" title="Rendered by QuickLaTeX.com" height="18" width="92" style="vertical-align: -4px;"> beschreibt das Äussere dieses Kreises.

3.2 – Die Illustration der Addition und Subtraktion komplexer Zahlen als Parallelogramm

Betrachten wir nun die Addition in der Ebene. Stellen wir uns z_1 und z_2 als Vektoren/Pfeile vor, die von 0 bis zu den entsprechenden Punkten gehen. Um $z_1 + z_2$ zu finden, nimmt man den Vektor z_2 und „klebt“ ihn an den Vektor z_1 an, wie wir hier sehen können:

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=24

Anders gesagt: $z_1 + z_2$ ist die Diagonale, vom Nullpunkt/ Ursprung aus, des durch z_1 und z_2 aufgespannten Parallelogramms.

Die Subtraktion hat eine analoge geometrische Veranschaulichung. Denken Sie, dass wir $z_1 - z_2$ schreiben können als $z_1 + (-z_2)$.

Applet zu obigen Überlegungen

En Applet zur Illustration der obigen Überlegungen finden Sie unter dem folgenden externen Link.

Übungen zum graphischen Addieren und Subtrahieren

Verwenden Sie dem folgenden Link, um sich mit den Rechenregeln für komplexe Zahlen vertraut zu machen. Üben Sie so lange, bis Sie „fliessend“ rechnen können!

- Addieren und Subtrahieren von komplexen Zahlen in der Ebene

Diese Veranschaulichung der Addition erklärt unmittelbar die Dreiecksungleichung:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Wenn man an $z_1 + z_2$, z_1 und z_2 als Vektoren denkt, bilden sie zusammen ein Dreieck und die Dreiecksungleichung 3.1 besagt, dass die Länge der Kante $z_1 + z_2$ kleiner ist als die Summe der Längen der anderen Kanten z_1 und z_2. Und diese Tatsache ist offensichtlich.

3.3 – Multiplikation mit einer reellen Zahl

Für die geometrische Bedeutung der Multiplikation müssen wir Polarkoordinaten einführen. Dies werden wir in Abschnitt 4 tun. Hier können wir die geometrische Bedeutung der Multiplikation mit einer reellen Zahl $t = t + 0i$ betrachten.

Wir haben

$$t(a + bi) = ta + tbi$$

und geometrisch, also in der Ebene, entspricht das einer Streckung mit dem Zentrum 0 und dem Streckfaktor t. Der Vektor ändert seine Richtung nicht, aber sein Betrag wird mit dem Faktor t multipliziert.

3.4 – Die Konjugation

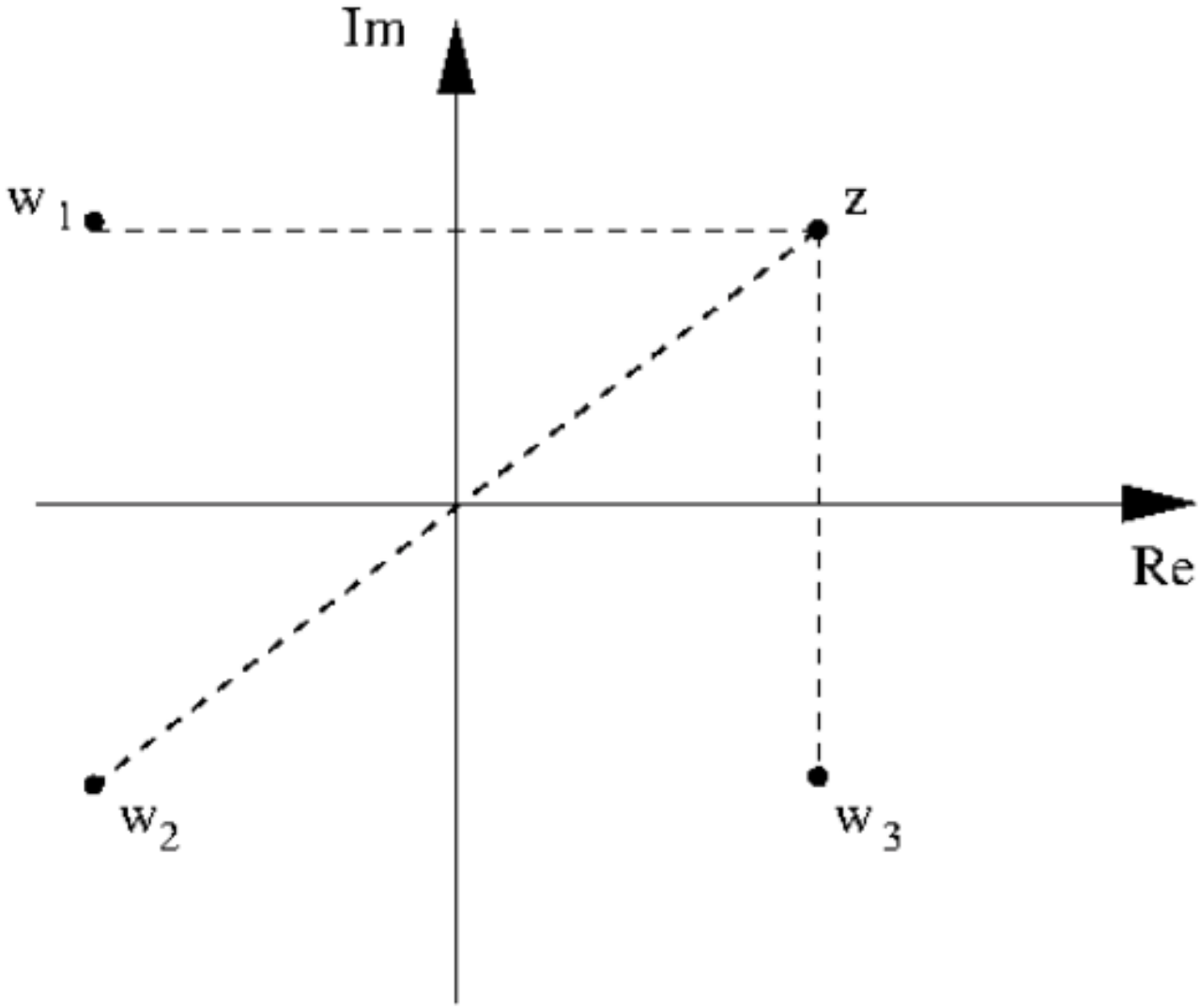
Wie wir gesehen haben, bildet die Konjugation aus einer komplexe Zahl $z = a + bi$ ihre Konjugierte $\bar{z} = a - bi$, oder kürzer

$$a + bi \mapsto a - bi.$$

In der komplexen Ebene entspricht die Konjugation der *Spiegelung* der Zahl an der reellen Achse (x-Achse).

Aufgabe

Welche Zahl stellt in der unten folgenden Grafik die komplex Konjugierte von z dar?



Spielen Sie mit dem folgenden Applet, um den Zusammenhang zwischen einer komplexen Zahlen und ihrer Konjugierten zu sehen:

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=24

Applet Konjugation

Das oben erwähnte Applet zur Konjugation finden Sie unter diesem externen Link.

Zum Schluss wollen wir noch den Zusammenhang der Konjugation mit dem Betrag sehen. Es gilt

$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$.

4

Polarkoordinaten

Bisher haben wir gesehen, dass wir komplexe Zahlen schreiben können als $z = a + bi$ (mit $a, b, \in \mathbb{R}$; Real- und Imaginärteil). Diese Darstellung nennt man auch *Normalform* oder *kartesische Form*.

Ausserdem haben wir gesehen, dass komplexe Zahlen in der komplexe Ebene – auch Gaussschen Ebene genannt, geometrisch veranschaulicht werden können. Wir haben dabei den Realteil auf der x-Achse und den Imaginärteil auf der y-Achse abgetragen.

Im Folgenden erörtern wir die Frage, ob und wie komplexe Zahlen auch anders dargestellt, respektive beschrieben werden könne. Dies wird uns aufs Stichwort der Polarkoordinaten führen.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

Video Darstellung komplexer Zahlen

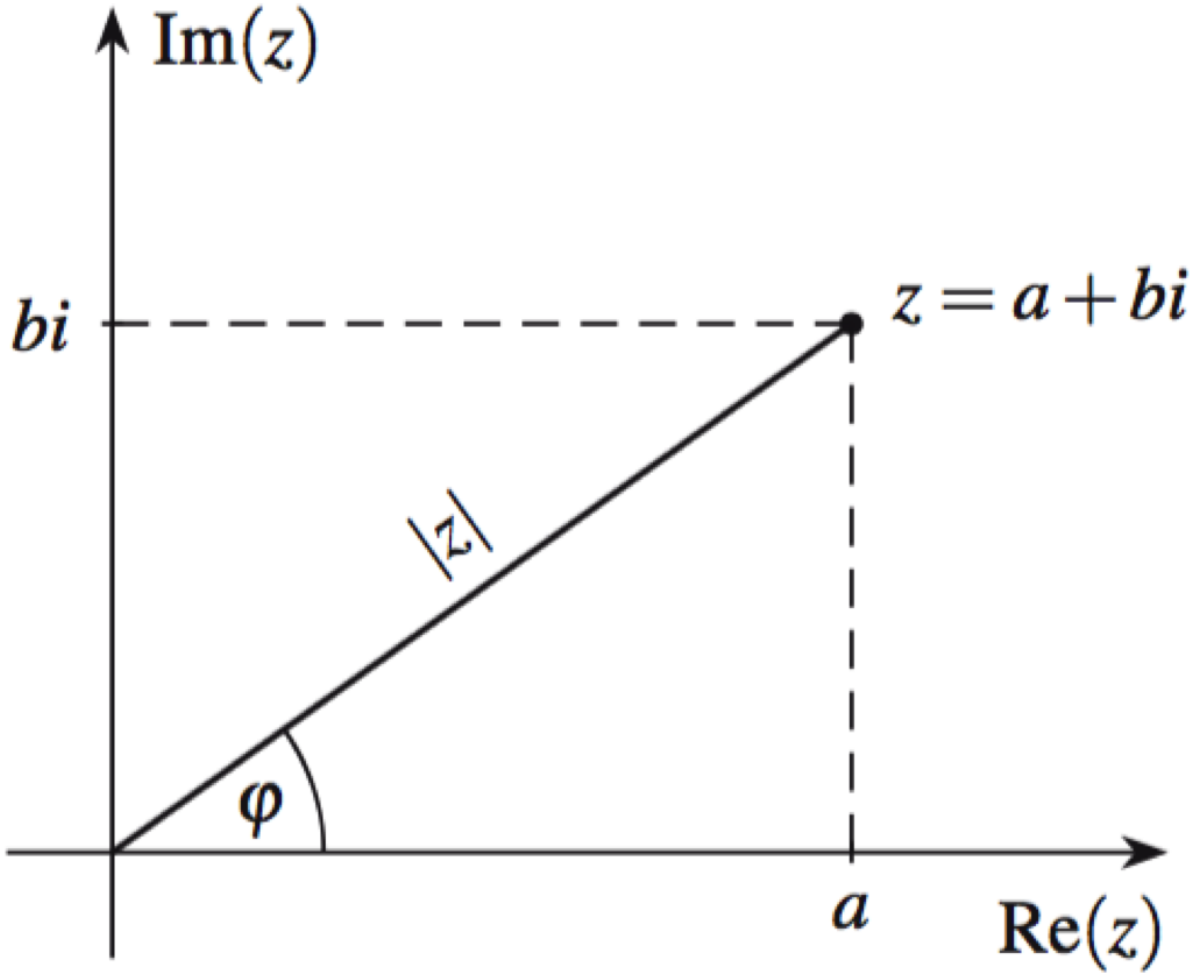
Hier finden Sie ein Video, welches zwei Möglichkeiten erklärt, wie man komplexe Zahlen in der Ebene darstellen kann.

Die Idee der Polarkoordinaten ist sehr wichtig, nicht nur für komplexe Zahlen sondern fast immer, wenn man sich mit der Ebene beschäftigt. Diese Darstellung hilft insbesondere, die Multiplikation und das Wurzelziehen besser zu verstehen.

Die grundsätzliche Idee ist sehr einfach. Jeder Punkt in der Ebene lässt sich beschreiben durch

- seinen Abstand zum Ursprung, das heisst, den Betrag
- und einen Winkel (seine „Richtung“). Dieser Winkel ist gerade der Winkel, welcher von der positiven reellen Achse und dem Strahl durch den Ursprung und den betrachteten Punkt eingeschlossen wird. Dieser Winkel wird auch *Polarwinkel* genannt.

Sei $z = a + bi$. Die untenstehende Abbildung illustriert die obige Beschreibung.



Den Betrag $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ haben wir schon erklärt. Ausserdem haben wir einen Winkel φ zwischen dem entsprechenden Vektor z und der positiven reellen Achse.

Bemerkung

Der Winkel φ ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt. Zum Beispiel liefert für $z = 1 + i$ jeder der folgenden Winkel eine korrekte Beschreibung des entsprechenden Punktes:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ oder } \frac{\pi}{4} + 2\pi \text{ oder } \frac{\pi}{4} + 4\pi \text{ oder } \frac{\pi}{4} - 2\pi k \text{ fr } k \in \mathbb{Z}.$$

Oder es gilt für $z = i$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{\pi}{2} - 2\pi \text{ oder } \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{ oder } \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ fr } k \in \mathbb{Z}.$$

Beachten Sie, dass der Winkel φ in der Regel im Bogenmass angegeben wird.

Wenn wir fordern, dass der Winkel in einem Intervall der Länge 2π liegt, wird er eindeutig. Wir legen hier fest:

Definition

Der Winkel φ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ heisst das *Argument* von z:

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi].$$

Achtung: Dies ist eine Wahl des Argumentintervalls. Eine andere populäre Wahl ist

$$\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi).$$

Auf dem Bild oben sehen wir, dass

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$

gilt. Und somit

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

wobei $arctan$ die Umkehrfunktion der Tangensfunktion ist. Beachten Sie, dass $\arctan$ Werte im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ annimmt. Deshalb stimmt (4.1) nur, wenn $\arg(z) \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Das gilt genau dann, wenn $z = a + bi$ in der rechten Halbebene liegt, also wenn $a > 0$" title="Rendered by QuickLaTeX.com" height="12" width="42" style="vertical-align: 0px;">. Das heisst, die komplexe Zahl liegt im I. oder IV. Quadranten.

Wenn $z = a + bi$ in der linken Halbebene liegt, also wenn $a < 0$, müssen wir die Fälle $b > 0$ 0" title="Rendered by QuickLaTeX.com" height="13" width="40" style="vertical-align: 0px;"> und $b < 0$ unterscheiden, das heisst, ob die Zahl im II. oder III. Quadranten liegt:

- Im II. Quadranten müssen wir den Winkel um π (180° Grad) verschieben, das heisst, wir haben $\varphi = \arg(a + bi) = \arctan\frac{b}{a} + \pi.$
- Im III. Quadranten müssen wir den Winkel um $-\pi$ verschieben, das heisst, wir haben $\varphi = \arg(a + bi) = \arctan\frac{b}{a} - \pi.$

Ist $a = 0$, dann liegt die Zahl auf der vertikalen Achse und hat die Form bi. Dann gilt

$$\arg(z) = \arg(bi) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \widehat{=} 90^\circ & b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & b < 0 \end{cases}$$ 0\\ -\frac {\pi }{2} & b<0\end{cases}\end{aligned} " title="Rendered by QuickLaTeX.com" height="54" width="271" style="vertical-align: 0px;">

Das Argument von $0 = 0 + 0i$ ist nicht definiert.

Damit haben wir ein Rezept für das Argument jeder komplexen Zahl. Diese Sache mit dem Argument ist am Anfang nicht ganz einfach. Wir werden uns weiter unten ein paar Beispiele dazu ansehen. Zuerst geben wir einige weitere Definitionen.

Definition

Sei z eine komplexe Zahl. Der Real- und Imaginärteil von z heissen *die kartesische Koordinaten* von z. Wenn wir sie als a und b bezeichnen, heisst die Darstellung

$$z = a + bi$$

die *algebraische/kartesische Darstellung* oder die *Normalform* von z.

Der Betrag r und der Winkel φ von z heissen *die Polarkoordinaten* von z.

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

heisst die *Polardarstellung*.

Die obigen Überlegungen zum Argument haben uns also gezeigt, wie wir von der Normalform in die Polarform umrechnen können. Dies ist zudem im folgenden Video nochmals zusammengefasst.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

Umrechnung Kartesisch – Polar

Das Video zur Umrechnung von der kartesischen Darstellung in die Polarform finden Sie unter diesem externen Link

Die umgekehrte Umrechnung, nämlich von der Polarform in die Normalform ist dagegen viel einfacher. Offensichtlich gilt
$a = r\cos\varphi \quad b = r\sin\varphi$.
Sind die Polarkoordinaten r und φ einer komplexen Zahl z gegeben, findet man die Normalform $z = a + ib$ einfach durch (4.2). Dies wird im folgenden Video rekapituliert.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

Umrechnung Polar – Kartesisch

Das Video zur Umrechnung von der Polarform in die kartesische Form finden Sie hier.

4.1 – Die Eulersche Formel

Bemerkung

Es gibt eine nützliche „Abkürzung“. Wir schreiben
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$

Diese Identität nennt man auch die *Eulersche Formel*.

Denken Sie zum jetzigen Zeitpunkt an diese Gleichheit wie an eine Definition. Das heisst, denken Sie, dass wir das Folgende geschrieben haben:

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

das heisst, dass wir die linke Seite durch die rechte Seite definieren. Wenn wir Potenzreihen besprechen, werden wir eine unabhängige Definition der linken Seite geben, und dann zeigen, dass die Gleichheit (4.3) gilt. Mit dieser Abkürzung sieht die Polardarstellung folgendermassen aus:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Wer jetzt schon mehr darüber erfahren möchte, warum die Eulersche Formel gilt, findet im folgenden Video mehr dazu.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

Video Euler

Das oben erwähnte Video zur Eulerschen Formel finden Sie hier.

Bemerken Sie, dass für jedes φ gilt

$$\left|e^{i\varphi}\right| = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Deshalb können wir uns in $e^{i\varphi}$ das φ als die „Richtung“ und r als den „Betrag/Länge“ der Zahl/des entsprechenden Vektors vorstellen.

(Un-)Eindeutigkeit der Polarform

Mit Blick auf die Wahl des Argumentes halten wir fest:

Aus der Gleichung $r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2}$ mit $r_1, r_2 > 0$0" title="Rendered by QuickLaTeX.com" height="16" width="72" style="vertical-align: -4px;"> und $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ folgt, dass

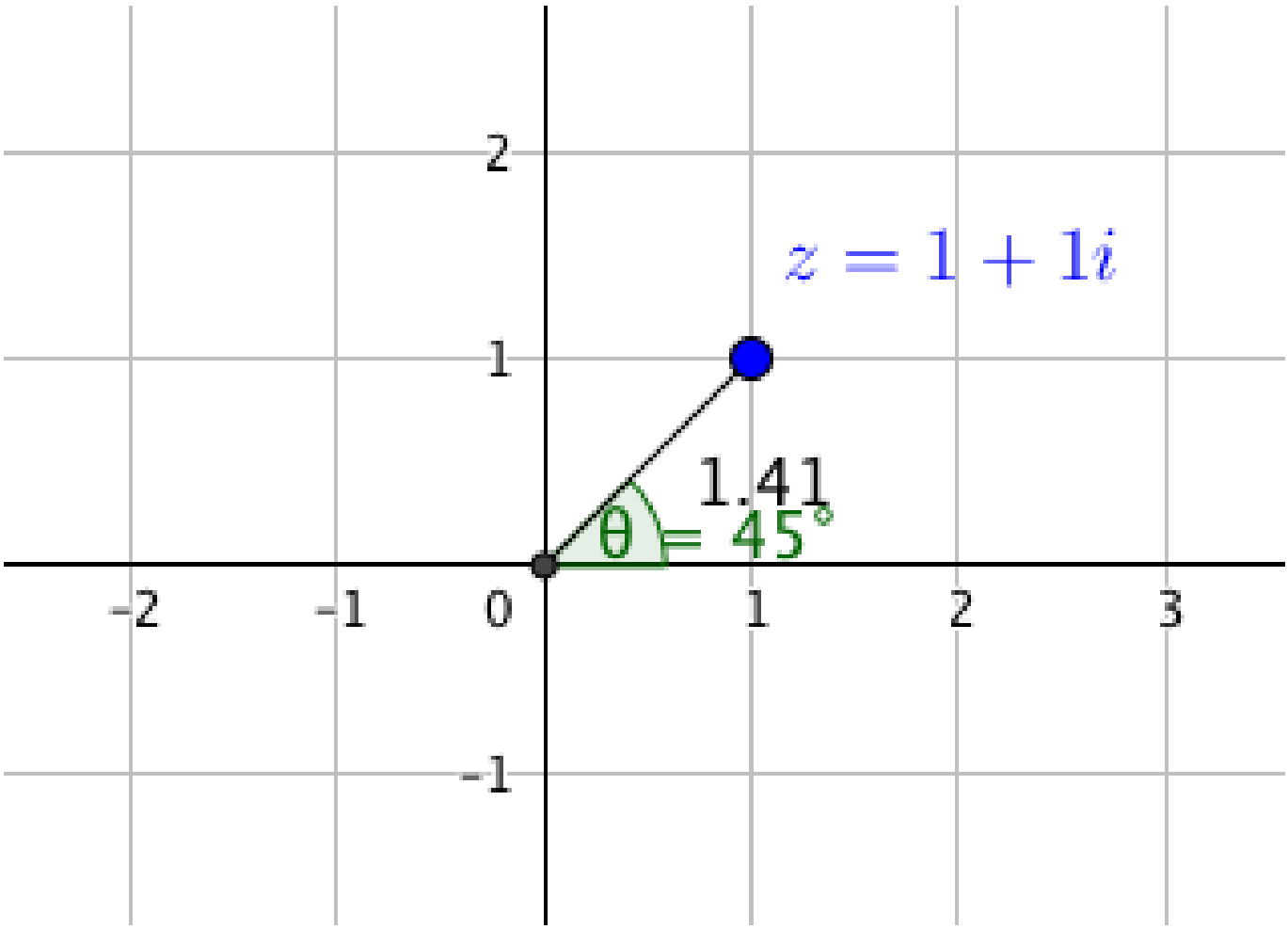
- $r_1 = r_2$ und
- $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Wichtiges Lernziel: Sie sollten beherrschen, wie man die eine Darstellung in die andere umwandelt.

4.2 – Beispiele

Beispiel

In diesem Beispiel wandeln wir eine komplexe Zahlen in der Normalform in die Polardarstellung um. Wir fangen mit $z_1 = 1 + i$ an. Da $\mathrm{Re}(1+i) = 1$ und $\mathrm{Im}(1+i) = 1$, entspricht dies dem Punkt $(1, 1)$ der Zahl $1 + i$.



Lösung:
Der Betrag lautet
$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

und den Winkel können wir aus dem Bild einfach ablesen

$\varphi = 45^\circ \widehat{=} \frac{\pi}{4}.$

Deshalb ist die Polardarstellung von $z_1 = 1 + i$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$

Beispiel

Gesucht ist die Polardarstellung von $z_2 = -3i$.

Lösung:

Da $\mathrm{Re}(-3i) = 0$, liegt der entsprechende Punkt auf der y-Achse. Da $\mathrm{Im}(-3i) = -3$, entspricht der Punkt $(0, -3)$ der Zahl $-3i$. Hier können beide Polarkoordinaten einfach aus dem Bild abgelesen werden:

$r = 3, \varphi = -\frac{\pi}{2}.$

Die gesuchte Polardarstellung lautet also:

$z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{\frac{-i\pi}{2}}.$

Beispiel

Was ist die Polarform von $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$?

Lösung:

Man berechnet direkt

$r = \sqrt{3 + 1^2} = 2$
$\tan(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{1}$

und, um den richtigen Wert von φ zu finden, muss man überlegen, in welcher Halbebene sich die komplexe Zahl befindet.

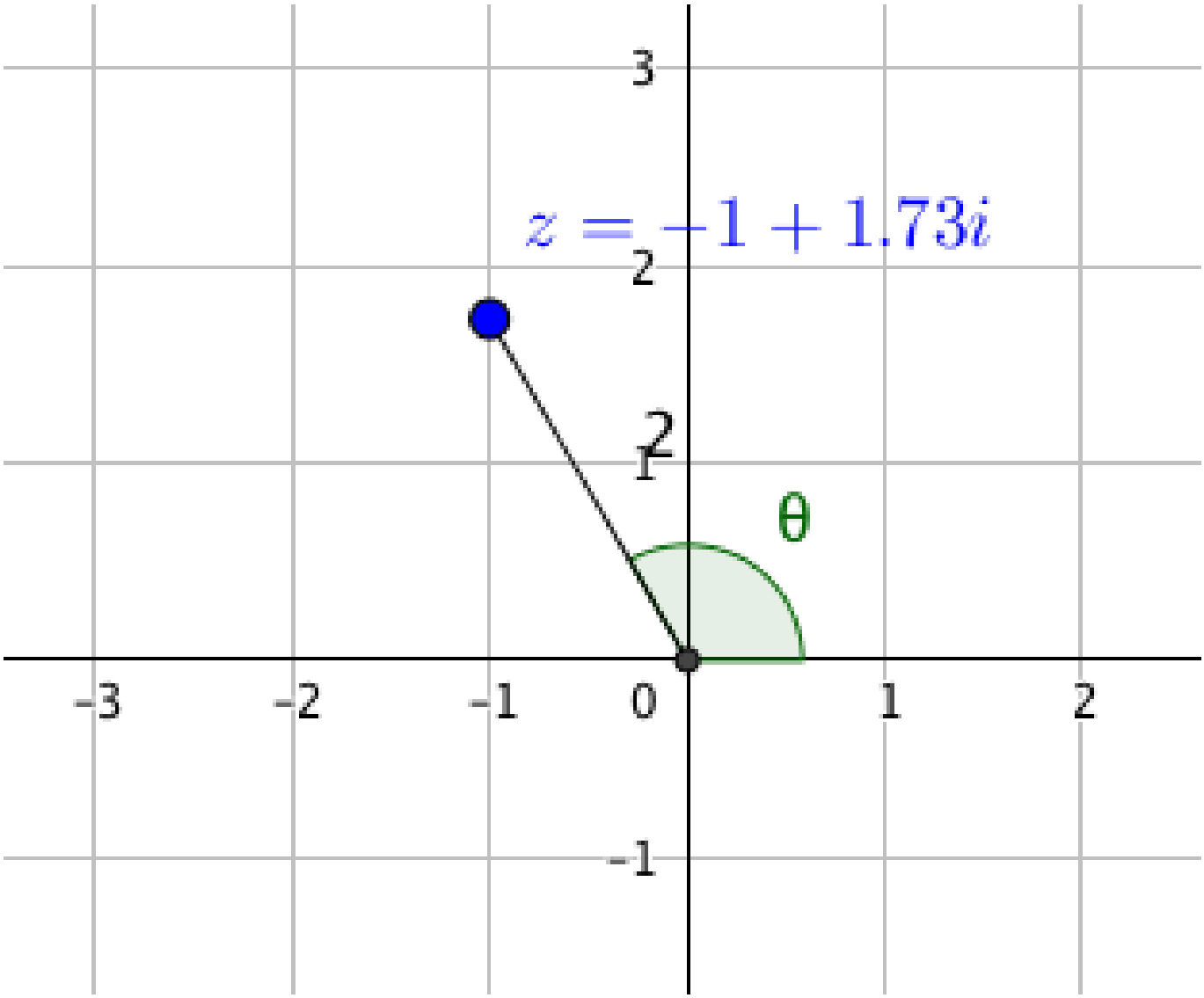
Da $\mathrm{Re}(-1+\sqrt{3}i) = -1 < 0$, befindet sich die Zahl $z_3 = -1+\sqrt{3}i$ in der linken Halbebene. Laut dem obigen Rezept gilt

$$\varphi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

So lautet die Polardarstellung

$$z_3 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Die Tatsache, dass $z_3 = -1+\sqrt{3}i$ in der linken Halbebene liegt, und folglich ihr Winkel zwischen $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ liegt, kann man natürlich aus einem Bild sehen:



Aber manchmal geht es einfacher mit einer direkten Berechnung.

Beispiel

In diesem Beispiel gehen wir von einer Polardarstellung zu einer algebraischen Darstellung. Die Umformung in diese Richtung ist viel einfacher. Schreiben Sie $z_4 = 2e^{-\frac{\pi i}{6}}$ in die Normalform um.

Lösung:

Man muss den Winkel $-\frac{\pi}{6}$ und den Betrag 2 einfach in (4.2) einsetzen. Einfacher gesagt, benutzt man die Definition von $e^{i\theta}$ und berechnet die Kosinus- und Sinuswerte, um die Zahl in die Form $a + bi$ zu bringen:

$$z_4 = 2e^{-\frac{\pi i}{6}} = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} - i.$$

Bemerkung

Nach diesen Beispielen lohnt es sich, auf Bemerkung 4.1 zurückzugehen. Dort wird gesagt, dass der Polarwinkel nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist. Das können wir aus der Polardarstellung in diesen Beispielen sehen: Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)).$$

Also bleibt die Zahl trotz einer Änderung des Winkels um ein Vielfaches von 2π gleich.

Übungen zu Polarkoordinaten

Verwenden Sie den folgenden Link, um sich mit den Rechenregeln für komplexe Zahlen vertraut zu machen. Üben Sie so lange, bis Sie „fliessend“ rechnen können!

- Polarkoordinatendarstellung von komplexen Zahlen

4.3 – Multiplikation in der Polardarstellung

Mittels Normalform können wir die Addition komplexer Zahlen als Addition von Vektoren veranschaulichen. Hingegen ist es nicht klar, was die geometrische Bedeutung der Multiplikation in Normalform ist. Mittels der Polardarstellung können wir die geometrische Bedeutung leicht verstehen, und dann folgen auch viele wichtige Konsequenzen daraus. z_1 und z_2 seien zwei beliebige komplexe Zahlen und wir stellen sie in Polarkoordinaten dar:

$$z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2).$$

Dann gilt

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1))\,(r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2))$$
$$= r_1 r_2((\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2))$$
$$= r_1 r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))$$

wobei die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus angewandt wurden. Das bedeutet die folgende wichtige Tatsache:

Beim Produkt komplexer Zahlen **multiplizieren sich die Beträge** und **addieren sich die Argumente**.
$$r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)\cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = r_1 r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))$$

Anders gesagt: Das Produkt zweier Zahlen ist gegeben durch die komplexe Zahl, die als Betrag das Produkt der Beträge der Faktoren hat und als Argument die Summe der beiden Winkel.

Mit der Eulerschen Formel ist das letzte Fazit leicht zu verstehen.
$$\underbrace{r_1 e^{i\phi_1}}_{z_1}\underbrace{r_2 e^{i\phi_2}}_{z_2} = \underbrace{r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}}_{z_1 z_2}$$

Spielen Sie mit z_1 und z_2 in diesem Applet, um das obige Fazit nachzuvollziehen.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

Applet Multiplikatin

Das oben erwähnte Applet finden Sie unter diesem externen Link.

Übungen zu Polarkoordinaten

Verwenden Sie folgenden Link, um sich mit den Rechenregeln für komplexe Zahlen vertraut zu machen. Üben Sie so lange, bis Sie „fliessend“ rechnen können!

- Multiplizieren und Dividieren in Polarkoordinaten

4.4 – Potenzen

Sei $z = re^{i\theta}$. Durch wiederholte Anwendung der Formel (4.4) können wir Potenzen leicht berechnen.

$$z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)) = r^2 e^{i2\theta}$$

$z^3 = r^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = r^3 e^{i3\theta}.$

Die einfache Verallgemeinerung hat den folgenden Namen.

Proposition : De Moivre'sche Formel

Ist $z = r(\cos(\theta) + i\sin\theta)$ eine komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}$, so berechnet sich die n-te Potenz von z als

$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r^n e^{in\theta}.$

Hier gibt es noch ein passendes Applet, welches die Formel graphisch veranschaulicht:

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

Applet De Moivre'sche Formel

Hier finden Sie das oben erwähnte Applet.

Übungen zu Potenzen von komplexen Zahlen

Verwenden Sie den folgenden Link, um sich mit den Rechenregeln für komplexe Zahlen vertraut zu machen. Üben Sie so lange, bis Sie „fliessend" rechnen können!

- Potenzen von komplexen Zahlen in Polarkoordinaten

Beispiel

Berechnen Sie $(1+i)^{14}$.
Hinweis: Rechnen Sie lieber ohne die binomische Formel.

Lösung:

Wir berechnen die Polardarstellung von $1+i$, und dann ist es ein Kinderspiel. Die Polardarstellung haben wir schon gefunden:

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Erinnern Sie sich, dass man keinen Arkustangens usw. braucht, um diese Polardarstellung zu finden, sondern nur diese Zahl in der komplexen Ebene einzeichnet, um daraus das Argument und den Betrag ablesen zu können.

Daher haben wir

$$(1+i)^{14}=\left(\sqrt{2}\right)^{14}e^{\frac{i\pi}{4}\cdot 14}=2^7e^{i\frac{7\pi}{2}}\overset{*}{=}128e^{\frac{i3\pi}{2}}=128(-i)=-128i.$$

Was ist in $*$ passiert? Erinnern Sie sich: „Das Argument ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt“. Deshalb sollten wir, um den Winkel besser „zu sehen“, diesen mit einem Vielfachen von 2π so verändern, bis er in $[0,2\pi)$ liegt. So bemerken wir, dass gilt

$$\frac{7\pi}{2}-2\pi=\frac{3\pi}{2}.$$

Dies erklärt nun sofort $*$.

Da wir uns auf das Argument zwischen $-\pi$ und π festgelegt hatten, müssen wir für $\frac{3\pi}{2}$ in $[0,2\pi)$ in noch den entsprechenden Winkel in $(-\pi,\pi]$ finden. Dies ist

$$\frac{3\pi}{2}-2\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

4.5 - Division

Mit der Polardarstellung können wir auch leicht die Division verstehen. Sei $z=re^{i\theta}$ eine komplexe Zahl, die schon in Polarform gegeben ist.

Was ist die Polardarstellung von $\frac{1}{z}$?

Das heisst, für welche ℓ,ϕ gilt $\frac{1}{z}=\ell e^{i\phi}$?

Offensichtlich lassen sich ℓ und ϕ aus der Gleichung $1=z\cdot\frac{1}{z}$ bestimmen. Dazu brauchen wir einfach die Polardarstellung von $1=1+0i$:

$$1=1e^{i0}=z\cdot\frac{1}{z}=re^{i\theta}\cdot\ell e^{i\phi}=r\ell e^{i(\theta+\phi)}.$$

Daraus folgt also $0=\phi+\theta$ und $1=r\ell$, so dass $\phi=-\theta$ und $\ell=\frac{1}{r}$.

Fazit: Wenn $z = re^{i\theta}$ ist, dann ist $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

Allgemeiner seien $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$. Wir möchten die Polardarstellung von $\frac{z_1}{z_2}$ finden.

Dazu merken wir einfach, dass $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$ und deshalb

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1 e^{i\phi_1} \cdot \frac{1}{r_2 e^{i\phi_2}} = r_1 e^{i\phi_1} \cdot \left(\frac{1}{r_2}\right) e^{-i\phi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}.$$

4.6 – Multiplikation mit $e^{i\phi}$

Es ist nützlich, den Spezialfall der Multiplikation mit $e^{i\phi}$ gut zu verstehen. Zuerst überlegen wir uns, was die Zahl $e^{i\phi}$ ist. Ihr Betrag ist immer 1, und ihr Polarwinkel ist ϕ. Wir möchten wissen, was die geometrische Bedeutung der Multiplikation mit $e^{i\phi}$ ist. Sei $z_0 = re^{i\theta}$ irgendeine komplexe Zahl. Dann ist

$$e^{i\phi} z_0 = e^{i\phi} r e^{i\theta} = r e^{i(\phi+\theta)}.$$

Daher ist die Multiplikation mit $e^{i\phi}$ eine Rotation um den Winkel ϕ. Der Betrag ändert sich nicht, und der Winkel wird um ϕ grösser bzw. kleiner.

4.7 – Repetition: Rechnen in Polarform

Das folgende Video fasst die gesehenen Rechenregeln nochmals zusammen, die es zu beachten gilt, wenn wir in der Polarform rechnen.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

Video Rechnen in Polarform

Das oben erwähnte Video finden Sie unter diesem externen Link.

4.8 – Trigonometrische Identitäten

Stellen Sie sich vor, Sie sind gerade bei der Basisprüfung, und Sie brauchen unbedingt die trigonometrische Formel für die Summe zweier Winkel α und β, und Sie finden diese Identitäten in

ihrem Formelbuch nicht. Kein Stress! Wenn Sie sich an die Potenzregeln und an die Eulersche Formel
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
erinnern, dann werden Sie leicht zurechtkommen! Hier ist der Trick: Gemäss den Potenzregeln, die selbstverständlich auch im Komplexen gelten, haben wir

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Mithilfe von 4.6 bekommen wir

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

Wir multiplizieren die Klammern aus und klammern i aus

$$(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

und dann können wir aus dem Realteil (bzw. dem Imaginärteil) die bekannten Formeln ablesen:

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$$
$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta).$$

Wenn Sie beispielsweise eine Formel für $\sin(n\theta)$ als eine Funktion von $\sin\theta$ finden möchten, können Sie einfach die Gleichung

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

benutzen.

4.9 – Wurzeln

Herleitung eines Rezeptes

Sei $z_0 = a + ib$ eine komplexe Zahl. Wir suchen nach der n-ten Wurzel von z_0. Eine n-te Wurzel von z_0 ist eine komplexe Zahl w mit

$$w^n = z_0.$$

Daher ist die Suche nach der n-ten Wurzel das Gleiche wie die Suche nach den Nullstellen des Polynoms

$$P(z) = z^n - z_0$$

(Wieso?). Der folgende Fakt sagt uns, nach wie vielen Wurzeln wir suchen.

Fakt

Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n Nullstellen
Bemerkung:

Aus dem Gymnasium sind sich einige Studenten daran gewöhnt, dass mit "Nullstellen" die Schnittmenge des Graphen mit der reellen Achse gemeint ist. Das gilt aber nur für reelle Funktionen. Hier sprechen wir über Polynome (deren Koeffizienten komplexe Zahlen sind) und Lösungen von Polynomgleichungen, die auch komplexe Zahlen sind. Also ist diese Vorstellung von Nullstellen als Schnittmenge mit der reelle Achse hier unpassend.
.

Beweis

Diese Tatsache zeigt man mit Hilfe der Polynomdivision. (Wenn Sie dies im Detail interessiert, lesen Sie zum Beispiel Arens Arens, Tilo and Hettlich, Frank and Karpfinger, Christian and Kockelkorn, Ulrich and Lichtenegger, Klaus and Stachel, Hellmuth: Mathematik *(Springer-Verlag, 2015)*.) □

Die Zahl z_0 kann also höchstens n verschiedene Wurzeln haben. Mit der Polardarstellung können wir sie leicht finden. Dazu sei $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ die Polardarstellung von z_0. Wenn $w = re^{i\varphi}$ eine n-te Wurzel von z_0 ist, dann gilt
$w^n = r^n e^{in\varphi} = z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$.
Wenn wir nicht vorsichtig sind, denken wir, dass sich aus (4.7)

$$r^n = r_0, \quad n\varphi = \theta_0$$

bzw.

$$r = \sqrt[n]{r_0} \quad \varphi = \frac{\theta_0}{n}$$
$$w = \sqrt[n]{r_0} e^{\frac{i\theta_0}{n}}$$

ergibt.

Wo sind die anderen Wurzeln? Um diese zu finden, müssen wir uns einfach in Erinnerung rufen, dass der Polarwinkel bis auf ein Vielfaches von 2π definiert ist. Daher folgt aus (4.7), dass

$$r^n = r_0, \quad n\varphi = \theta_0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

bzw.

$$r = \sqrt[n]{r_0} \quad \varphi = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}$$

Das heisst, jede komplexe Zahl
$w_k = \sqrt[n]{r_0} e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$
ist eine n-te Wurzel von z_0.

Das ist aber ein bisschen seltsam, oder? Statt einer Wurzel haben wir jetzt unendliche viele? Laut Fakt können wir höchstens n Wurzeln haben. Die Lösung dieses Geheimnisses liegt nochmals in der Tatsache, dass der Polarwinkel nur bis auf ein Vielfaches von 2π definiert ist. Der Lesbarkeit halber schreiben wir (4.8) mit $\exp$ statt mit e:

$$w_k = \sqrt[n]{r_0} \exp i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right).$$

Schauen wir uns die Zahlen genauer an. Alle w_k haben den selben Betrag $\sqrt[n]{r_0}$, aber ihre

Polarwinkel unterscheiden sich voneinander mit einem Vielfachen von $\frac{2\pi}{n}$. Das weist daraufhin, dass $w_k = w_{k+n}$, und so ist es in der Tat.

$$w_k = \sqrt[n]{r_0} \exp i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) = \sqrt[n]{r_0} \exp i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi \right)$$
$$= \sqrt[n]{r_0} \exp \left(i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi (k+n)}{n} \right) \right) = w_{k+n}$$

Ausserdem sind die Wurzeln $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$ alle unterschiedlich voneinander. Aus obigem Fakt wissen wir, dass es keine anderen gibt.

Wir fassen diese Diskussion zusammen:

Die n-ten Wurzeln von $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ sind genau

$$\sqrt[n]{r_0} \exp \left(i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right)$$

für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

Video Wurzelziehen (algebraisch)

Hier finden Sie per Video mehr zur algebraischen Berechnung von Wurzeln.

Beispiel

Bestimmen Sie die dritten Wurzeln von -8 in Polar- und Normalform.

Lösung:
Um das Kochrezept oben zu verwenden, müssen wir zuerst die Polardarstellung von -8 bestimmen. Der Betrag ist

$$|-8| = 8$$

und der Winkel ist π. Das heisst

$$-8 = 8e^{i\pi}$$

Damit ergeben sich nach dem obigen Rezept die dritten Wurzeln wie folgt:

$$w_k = \sqrt[3]{8}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right), \quad k=0,1,2$$

In Normalform

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[3]{8}\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1+\sqrt{3}i \\
w_1 &= \sqrt[3]{8}\exp\left(\frac{3\pi i}{3}\right) = 2(-1+i\cdot 0) = -2 \\
w_2 &= \sqrt[3]{8}\exp\left(\frac{5\pi i}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}+i\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right) = 1-\sqrt{3}i.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass w_1 eine reelle Wurzel ist.

4.9.1 – Wie sieht das geometrisch aus?

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

Video Wurzelziehen (geometrisch)

Hier finden Sie per Video mehr Informationen zur geometrischen Bedeutung des Wurzelziehens.

Wir haben oben ein Kochrezept für alle n-ten Wurzeln einer gegebenen komplexen Zahl $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ hergeleitet. Als Nächstes zeichnen wir diese in die komplexe Ebene ein und sehen, welche geometrischen Eigenschaften sich herausstellen. Zuerst bemerken wir, dass der Betrag aller Wurzeln gleich ist: Er ist $\sqrt[n]{r_0}$. Das heisst, dass alle Wurzeln auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r_0}$ liegen.

Zweitens betrachten wir ihre Winkel. Eine Wurzel hat den Winkel $\frac{\theta_0}{n}$ und die anderen Wurzeln sind jeweils um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ versetzt.

Um die n-te Wurzel einer Zahl $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ zu zeichnen, müssen wir also eine Wurzel mit Betrag $\sqrt[n]{r_0}$ und Winkel $\frac{\theta_0}{n}$ zeichnen und dann diese Wurzel so oft um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ versetzen, bis wir zurückkommen zur ersten Wurzel.

Spielen Sie mit diesem Applet, um das eben Erklärte nachzuvollziehen.

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

Applet Wurzelziehen

Das oben erwähnte Applet zum Wurzelziehen finden Sie hier.

Beispiel

Finden Sie alle Lösungen von $z^8 = 4 + 3i$. Zeichnen Sie diese in die komplexe Ebene ein.

Lösung:
Die Lösungen sind genau die acht Wurzeln von $4 + 3i$. Also ist diese Aufgabe äquivalent zu: „Finden Sie die acht Wurzeln von $4 + 3i$„.

Um das obige Rezept zu verwenden, müssen wir zuerst die Polardarstellung von $4 + 3i$ finden. Dazu berechnen wir

$$r_0 = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Da diese Zahl im ersten Quadranten liegt, berechnet sich ihr Winkel gemäss

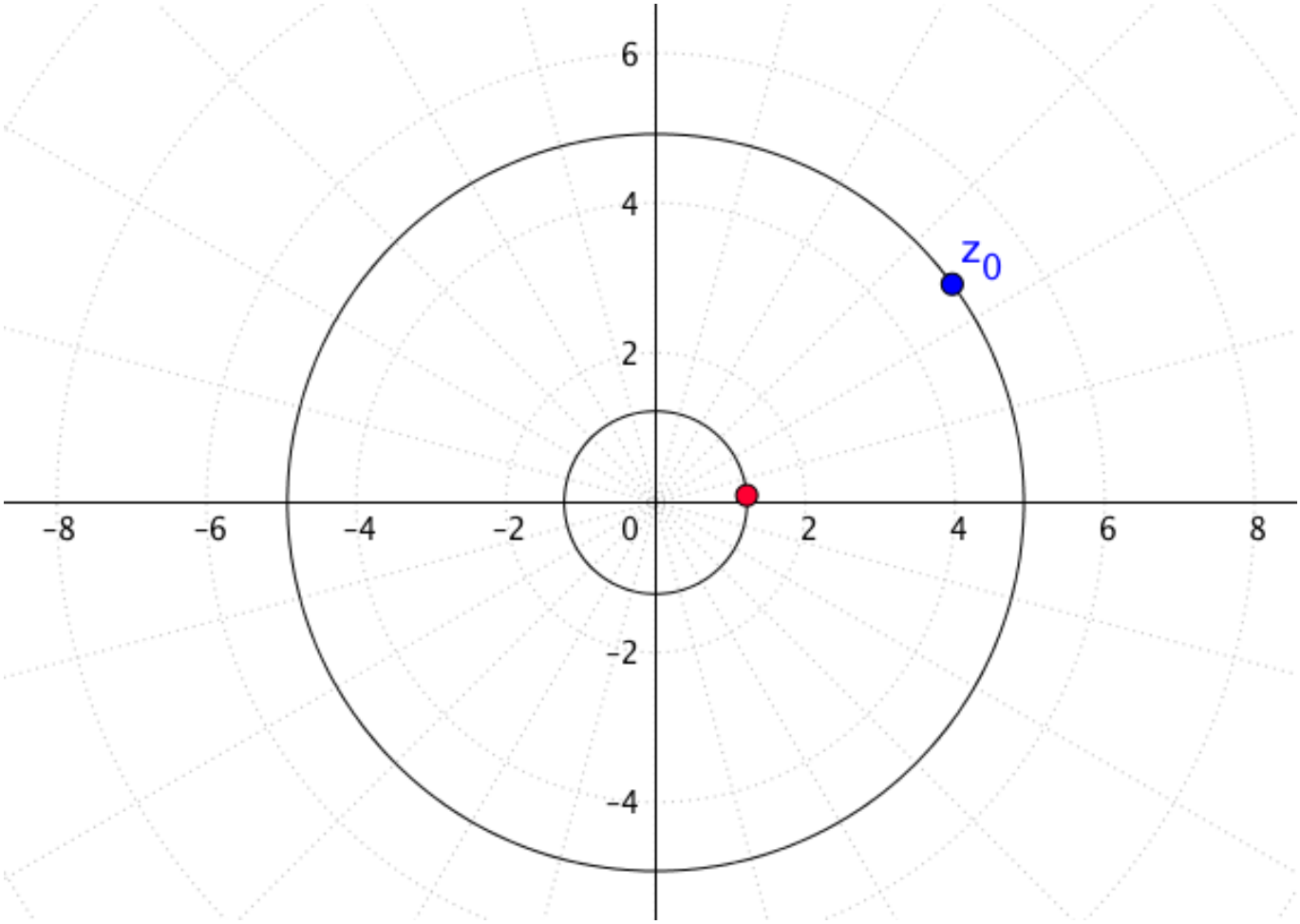
$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{3}{4}\right).$$

(Man kann den Wert von θ_0 mit einem Taschenrechner berechnen.) Mit diesen Informationen können wir schreiben

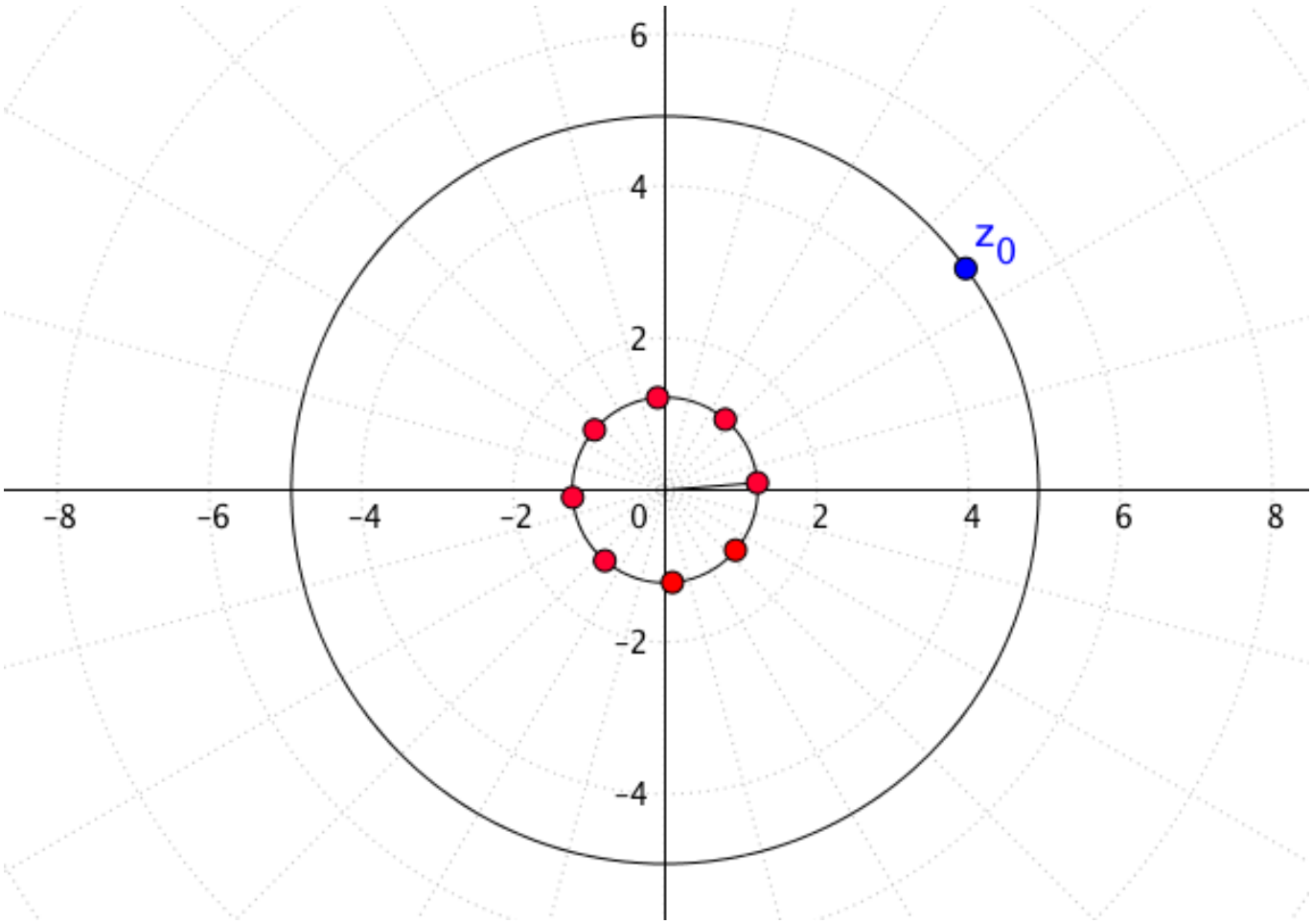
$$z_0 = 4 + 3i = r_0 e^{\theta_0 i} = 5e^{\arctan\left(\frac{3}{4}\right)i}.$$

Laut der geometrischen Beschreibung ist nun die Lösung der Aufgabe sehr einfach zu zeichnen.

Zuerst zeichnen wir die Wurzel mit dem Winkel $\frac{\theta_0}{8}$ und Betrag $\sqrt[8]{5}$. In der Abbildung unten ist z_0 blau eingezeichnet, rot sind die Wurzeln eingezeichnet.



Des Weitern haben wir noch sieben andere Wurzeln, jede um $\frac{2\pi}{8}$ versetzt. Alle Wurzeln haben denselben Betrag.



Algebraisch sind die Wurzeln gleich

$$\sqrt[8]{5}e^{\frac{\theta_0+2\pi k}{8}i}, \quad k=0,1,2,\cdots,7.$$

Um diese „Versetzung“ algebraisch zu sehen, können wir das obige Resultat so umschreiben:

$$\sqrt[8]{5}e^{\frac{\theta_0}{8}}e^{\frac{2\pi k}{8}i} = \sqrt[8]{5}e^{\frac{\theta_0}{8}i}\left(e^{\frac{2\pi}{8}i}\right)^k, \quad k=0,1,2,\cdots,7.$$

Bemerkung

Um den letzten Schritt der obigen Lösung zu verstehen, kann sich der Leser daran erinnern, was die Multiplikation mit einer Zahl der Form $e^{i\phi}$ bedeutet. Siehe Abschnitt 4.6.

Beispiel

Die Lösungen von
$z^n = 1$
nennt man n-te Einheitswurzel. Berechnen und zeichnen Sie alle n-ten Einheitswurzeln für

$n = 2, 3, 4, 5, 6.$

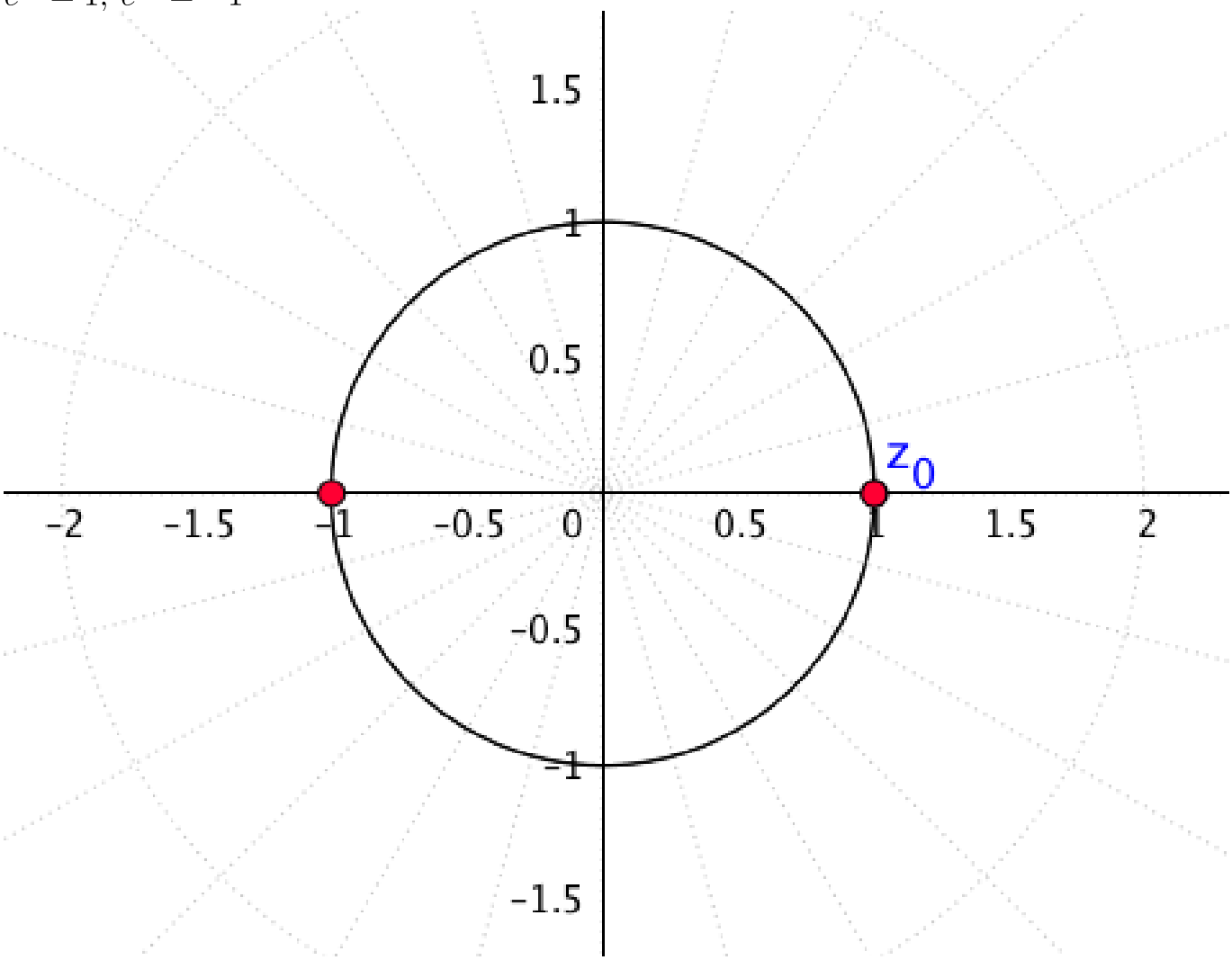
Lösung:
Das ist leicht geometrisch gemacht. Die Polardarstellung von $1 = 1 + 0i$ ist sehr einfach. Sie ist $1 = 1e^{i \cdot 0}$. Deshalb ist eine n-te Wurzel gleich

$$\sqrt[n]{1} e^{i \frac{0}{n}} = 1e^{i0} = 1.$$

Das ist keine Überraschung. 1 ist immer eine Lösung von 4.9, da $1^n = 1$. Die anderen Wurzeln sind um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ versetzt. Das heisst, dass alle Lösungen auf dem Einheitskreis liegen und jeweils den Winkel $\frac{2\pi k}{n}$ haben, $k = 0, \cdots, n-1$.

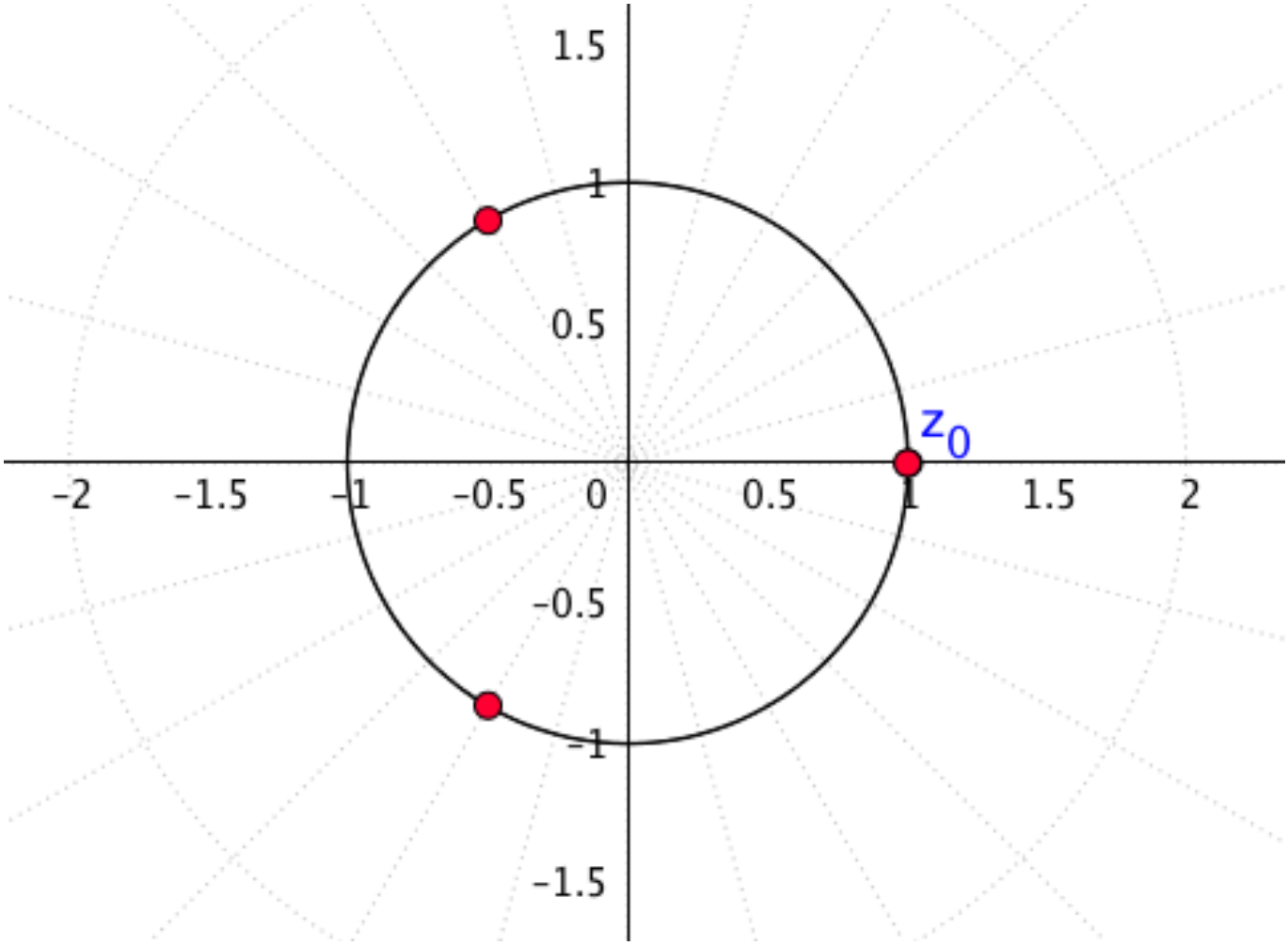
Für $n = 2$ bekommen wir

$$e^{0i} = 1,\ e^{\pi i} = -1$$

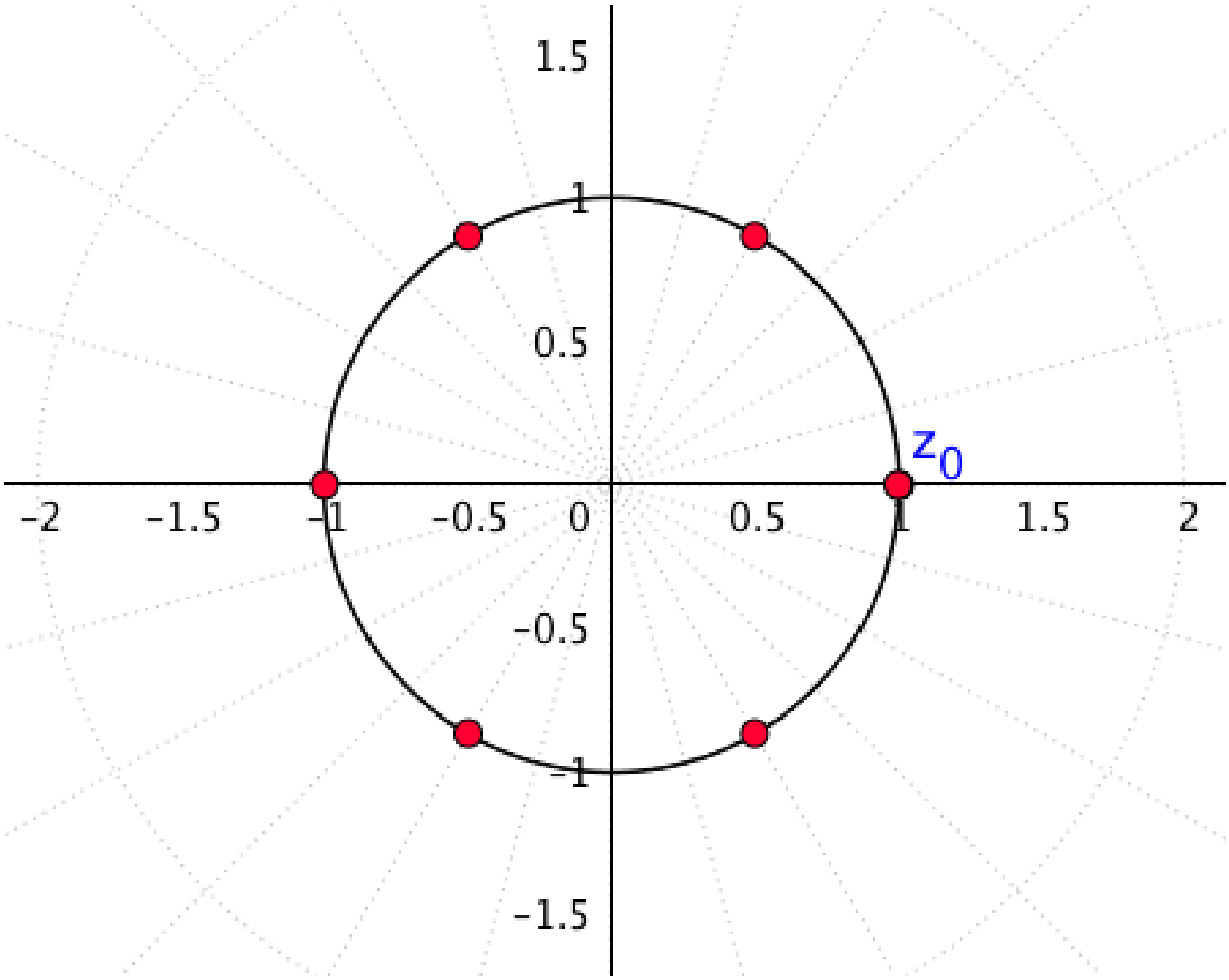


Für $n = 3$

$$e^{0i} = 1,\ e^{\frac{2\pi}{3} i},\ e^{\frac{4\pi}{3} i}$$



Zum Beispiel sind hier die Einheitswurzeln mit $n = 6$:



Für ein anderes n können Sie die Wurzeln in diesem Applet sehen.

4.9.2 – Quadratwurzeln

Beispiel

In diesem Beispiel zeigen wir zwei äquivalente Wege, quadratische Wurzeln einer komplexen Zahl zu schreiben. Im Gegensatz zum reellen FallWenn $r \in \mathbb{R}$ ist, dann ist $\sqrt{r}$ nicht definiert, wenn $r < 0,$ oder $\sqrt{r}$ ist die (eindeutig definierte) nicht-negative, reelle Zahl, deren Quadrat r ist. gibt es keine eindeutige Bedeutung von $\sqrt{z}$ wenn $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Es gibt immer zwei quadratische Wurzeln, von denen keine bevorzugt wird. Diese Wurzeln können wir natürlich mit dem obigen Rezept finden.

Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = re^{\theta i}$, $r \geq 0$. Laut dem Rezept oben, sind

$$w_k = \sqrt{r}e^{\left(\frac{\theta+2\pi k}{2}\right)i}, \quad k = 0, 1$$

die quadratischen Wurzel von z. Ausdrücklich sind sie

$w_1 = \sqrt{r}e^{\frac{\theta}{2}i},\ w_2 = \sqrt{r}e^{(\frac{\theta+2\pi}{2})i}.$

Da $e^{\pi i} = -1$ und $w_2 = w_1 e^{\pi i}$, gilt

$w_2 = -w_1,$

wie erwartet. Das heisst, um die Quadratwurzeln zu finden, reicht es, eine Wurzel zu finden und für die andere das Vorzeichen zu ändern. Daher können wir die Wurzeln folgendermassen schreiben

$w_{1,2} = \pm\sqrt{r}e^{\frac{\theta}{2}i},$

und diese Schreibweise sieht ähnlich aus wie im reellen Fall.

Korollar

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $az^2 + bz + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C}$ sind

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

wobei $\sqrt{b^2 - 4ac}$ eine (egal welche) der zwei Wurzeln von $b^2 - 4ac$ ist. Diese Formel gilt, egal ob $b^2 - 4ac$ eine reelle oder komplexe Zahl ist.

Anders gesagt, die Lösungen sind

$$\frac{-b + w_1}{2a},\ \frac{-b + w_2}{2a}$$

wobei w_1 und w_2 die zwei Wurzeln von $b^2 - 4ac$ sind.

Achtung: Es kann selbstverständlich auch der Fall eintreten, dass gilt $b^2 - 4ac = 0$. In diesem Fall sind die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung identisch. Betrachten Sie dazu das Beispiel $z^2 - 4z + 4 = 0$. Hier ist $z = 2$ eine doppelte Nullstelle.

Bemerkung

Oben verwenden wir die Gleichheit

$e^{\pi i} = -1.$

Diese nennt man „die Euler'sche Identität“ und einige Leute auch „die schönste Identität der Mathematik“, und die formen Sie folgendermassen um:

$e^{\pi i} + 1 = 0.$

Warum die Schönste? Vielleicht weil sie sehr verschiedene Sachen miteinander verbindet. Wir haben die Grundrechenarten Addition und Potenzen.

Weiter verbindet sie wichtige Konstante: 1 und 0 kommen aus der Arithmetik, die Kreiszahl π kommt aus der Geometrie, die imaginäre Zahl i kommt aus der Algebra, die konstante Zahl e kommt aus der Analysis/Wahrscheinlichkeitsrechnung. Und diese Identität verbindet wirklich alles! Eine erheiternde Erläuterung der Eulerschen Identität finden Sie im abschliessenden Video unten

An interactive or media element has been excluded from this version of the text. You can view it online here:
https://wp-prd.let.ethz.ch/WP0-CIPRF9961/?p=25

<!– post meta –>

erheiterndes Video Eulersche Identität

Die oben erwähnte erheiternde Videoaufbereitung finden Sie hier.

5

Gleichungen mit komplexen Zahlen

Beispiel : Gleichungen mit komplexen Zahlen aus Arens Arens, Tilo and Hettlich, Frank and Karpfinger, Christian and Kockelkorn, Ulrich and Lichtenegger, Klaus and Stachel, Hellmuth: Mathematik *(Springer-Verlag, 2015)*

Lösen Sie

$$\begin{array}{ll} (a) & (z+1)^5 = (z-1)^5 \\ (b) & z^6 - (3+i)z^3 + 2 + 2i = 0 \end{array}$$

Bemerkung

Wenn nicht anders formuliert, meinen wir mit „Lösen“ die Bestimmung sämtlicher Lösungen dieser Gleichung. Unsere Strategie basiert auf dem Folgenden:

Wir können bis jetzt zwei Dinge, nämlich Wurzeln ziehen und quadratische Gleichungen lösen. Noch nicht viel mehr :). Also ist die Strategie, dieses Problem irgendwie in eines der folgenden Probleme umzuwandeln:

1. Eine Wurzel zu ziehen, heisst $z^n = c, \quad c \in \mathbb{C}$ zu lösen.
2. Eine quadratische Gleichung zu lösen, heisst $az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$ zu lösen.

5.1 – Lösung des obigen Beispiels

Wie müssen wir nun also vorgehen? Machen wir eine schlaue Substitution!

Beginnen wir mit (a) :

Zuerst merken Sie sich, dass 1 keine Lösung von (a) ist.

Deshalb suchen wir nur $z \neq 1$. Für $z \neq 1$ dürfen wir durch $(z-1)$ dividieren und weiter können wir die Substitution $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ machen. Aus (a) folgt

$$w^5 = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1 = 1 \cdot e^{i0}$$

und nun müssen wir $w^5 = 1$ lösen. Das ist einfach Wurzelziehen.

Die Lösungen von $w^5 = 1$ sind die fünf Einheitswurzeln

$$w_k = e^{i\frac{2\pi k}{5}} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Nun müssen wir zurück zur Variable z gehen. Deshalb lösen wir

$$\begin{aligned} w_k = e^{i\frac{2\pi k}{5}} &= \frac{z+1}{z-1} \\ \implies w_k(z-1) &= z+1 \\ \implies z(w_k-1) &= w_k+1 \\ \implies z &= \frac{(w_k+1)}{(w_k-1)}. \end{aligned}$$

Deshalb sind die Lösungen von (a)

$$\frac{(w_k+1)}{(w_k-1)} = \frac{\left(e^{i\frac{2\pi k}{5}}+1\right)}{(e^{i\frac{2\pi k}{5}}-1)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Für (b) ist der Trick, $w = z^3$ einzusetzen und damit eine quadratische Gleichung zu bekommen.

$$w^2 - (3+i)w + (2+2i) = 0$$

Laut Abschnitt 4.9.2 haben die Lösungen die Form

$$w_1 = \frac{3+i+u_1}{2}, w_2 = \frac{3+i+u_2}{2},$$

wobei u_1 und u_2 die zwei Wurzeln von

$$(3+i)^2 - 4(2+2i) = 9 + 6i - 1 - 8 - 8i = -2i$$

sind.

Was sind die Wurzeln von $-2i$?

Betrachten wir das geometrisch. Das Argument von $-2i$ ist $-\frac{\pi}{2}$ und der Betrag ist 2. Daher sind die Wurzeln

$$\{u_1, u_2\} = \left\{\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}\right)i}, \sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)i}\right\} = \left\{\sqrt{2}e^{\left(\frac{3\pi}{4}\right)i}, \sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}\right)i}\right\}.$$

Sehen Sie schon ihre Normalform? Um w_i zu berechnen, sollten wir u_i in der Normalform schreiben. Man berechnet sie entweder geometrisch oder algebraisch. Dann sieht man, dass sie

$-1+i$ und $1-i$ sind:

$$\{w_1, w_2\} = \left\{ \frac{3+i+(-1+i)}{2}, \frac{3+i+(1-i)}{2} \right\} = \{1+i, 2\}\,.$$

In Arens Arens, Tilo and Hettlich, Frank and Karpfinger, Christian and Kockelkorn, Ulrich and Lichtenegger, Klaus and Stachel, Hellmuth: Mathematik *(Springer-Verlag, 2015)* können Sie einen anderen Weg sehen, diesen Zwischenschritt nachzuvollziehen.

Nun sollten wir zurück zur Variable z gehen. Das heisst, die Gleichheiten

$$z^3 = 1+i \text{ und } z^3 = 2$$

lösen. Das ist nochmals Wurzelziehen! Dazu müssen wir $1+i$ und 2 in Polarkoordinaten schreiben.

$$z^3 = 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

Deshalb sind

$$\{z_1, z_2, z_3\} = \sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi}{12}i}, \sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi}{12}i+\frac{2\pi}{3}i}, \sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi}{12}i+\frac{4\pi}{3}i}$$

drei Lösungen von (b). Die anderen drei sind die Lösungen von

$$z^3 = 2 = 2e^{i0},$$

welche

$$\{z_4, z_5, z_6\} = \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

sind.

<!– post meta –>

6

Fundamentalsatz der Algebra

Ausgangspunkt der Einführung der komplexen Zahlen war das Bestreben, aus negativen Zahlen die Wurzel zu ziehen. Wir haben gesehen, dass wir sogar die n-ten Wurzeln aus jeder Zahl ziehen können und viele andere Gleichungen lösen können. In Wirklichkeit gilt ein viel allgemeinerer Satz: der **Fundamentalsatz der Algebra**.

Proposition : ohne Beweis

Jedes Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besitzt mindestens eine Nullstelle.

Korollar

Jedes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ kann man zerlegen in n, nicht notwendigerweise verschiedene Linearfaktoren. Das heisst

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

wobei $z_i \in \mathbb{C}$ die Nullstellen sind.

Beweis des Korollars

Sei $P(z)$ ein beliebiges Polynom vom Grad n. Laut der obigen Proposition hat $P(z)$ eine Nullstelle, welche wir mit z_1 bezeichnen. Dann ist P durch $z - z_1$ teilbar und durch ein Polynomdivision finden wir P_1, ein Polynom vom Grad $n - 1$, sodass

$$P(z) = (z - z_1) P_1(z).$$

Jetzt verwenden wir nochmals die obige Proposition aber diesmal mit dem Polynom P_1. Laut dieser Proposition finden wir eine Nullstelle z_2 von $P_1(z)$ und dann ist P_1 durch $z - z_2$ teilbar. Mit der Polynomdivision finden wir $P_2(z)$ vom Grad $n - 2$, sodass

$$P(z) = (z - z_1) P_1(z) = (z - z_1) \underbrace{(z - z_2) P_2(z)}_{= P_1(z)}.$$

So fahren wir fort (n-mal), bis wir $P(z)$ als

$$P(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n) P_n(z)$$

ausdrücken können, wobei $P_n(z)$ ein Polynom vom Grad 0 ist. Das heisst $P_n(z)$ ist einfach eine Konstante. Wir können diese Konstante mit a_n bezeichnen, und erhalten damit die erwünschte

Zerlegung. □

Bemerkung

Die Nullstellen $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sind nicht notwendig verschieden! Hier ist ein extremes Beispiel:

$$z^n = (z-0)^n$$

Die obige Proposition stimmt natürlich nicht über $\mathbb{R}$. Alles in diesem Kapitel hat mit der Tatsache angefangen, dass $x^2+1=0$ keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ hat. Falls P ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist, so sind die zugehörigen Nullstellen **nicht** notwendigerweise reell. Es gilt aber:

Lemma

Sei P ein reelles Polynom von Grad n, das heisst,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$. Ist z_0 eine Nullstelle von P, so ist auch ihre komplex konjugierte Zahl $\bar{z}_0$ eine Nullstelle von P. Weiter gilt, dass die Anzahl der Nullstellen, die nicht reell sind, immer gerade ist.

Beweis des Lemmas

Wir werden nur den ersten Teil des Lemmas beweisen. Erinnern Sie sich, dass gilt

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Deshalb gilt auch

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$.

Da z_0 eine Nullstelle ist, gilt

$$0 = P(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0.$$

Wir konjugieren beide Seiten dieser Gleichung

$$\overline{0} = \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = \spadesuit$$

und verwenden die obigen Regeln

$$\begin{aligned}\spadesuit &= \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z_0}^n + \overline{a_{n-1} z_0}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0}.\end{aligned}$$

Da $a_i \in \mathbb{R}$ sind, gilt $\overline{a_n} = a_n$. Daher bekommen wir

$$0 = a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1}\overline{z_0}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z_0} + a_0.$$

Das heisst genau, dass $P(\overline{z_0}) = 0$ gilt, sprich: $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von P ist. □

Bemerkung

Betrachten wir den Fall eines quadratischen Polynoms der Form

$$P(z) = z^2 + \alpha z + \beta.$$

Zuerst möchten wir die Beziehung zwischen den Nullstellen und den Koeffizienten verstehen. Das obige Korollar besagt, dass P die Form

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$$

hat, wobei z_1 und z_2 die Nullstellen dieses Polynoms sind. Wenn man die Klammern ausmultipliziert

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2,$$

sieht man, dass $\alpha = -(z_1 + z_2)$ und $\beta = z_1 z_2$ gilt. Daraus schliessen wir

$$z_1, z_2 \in \mathbb{R} \implies \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

das heisst, wenn die Nullstellen reell sind, sind es auch die Koeffizienten.

Die Umkehrung dieser Implikation ist falsch. Die Koeffizienten von $P(z) = z^2 + 1$ sind reell, aber die Nullstellen sind nicht reell. Dennoch besagt das obige Lemma , dass die Nullstellen komplex konjugierte voneinander sein müssen! Das ist in der Tat so. Die Nullstellen sind i und $-i$.

Sei nun $z_0 = a + bi$ irgendeine komplexe Zahl. Allgemeiner können wir untersuchen, wie das Polynom Q aussieht, dessen Nullstellen z_0 und $\overline{z_0}$ sind. Vom obigen Lemma erwarten wir, dass dieses Polynom reelle Koeffizienten hat, und so ist es in der Tat:

$$Q(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0\overline{z_0}$$

und $z_0 + \overline{z_0}$ und $z_0\overline{z_0}$ sind reelle Zahlen

$$z_0 + \overline{z_0} = a + bi + (a - bi) = 2a$$
$$z_0\overline{z_0} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Also hat Q die Form

$$Q = z^2 - 2az + (a^2 + b^2).$$

Wenn wir ein reelles Polynom zweiten Grades haben, besagt obiges Lemma, dass es zwei Möglichkeiten gibt: Entweder sind beide Nullstellen reell, oder ein Paar komplex konjugierter Nullstellen.

Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- Ein reelles Polynom dritten Grades muss zumindest eine reelle Nullstelle haben.
- Ein komplexes Polynom vom dritten Grad muss zumindest eine reelle Nullstelle haben.

6.1 – Zusätliches Material

Unser Geogebra-Buch enthält weitere (graphische) Anschauungen und Übungsmaterial für das ganze Thema.