Musterlösung Aufgabe 3, Serie 5

Laura Keller

Aufgabe

Ein wärmesensitives Teilchen bewegt sich in einem Umfeld, welches durch die Funktion $U(a,b) = -e^{-2b}\sin(a)$ beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Bahn $b = y(a)$ dieses Teilchens, wenn es am Punkt $(0,1)$ startet.
Hinweise: Überlegen Sie sich, wodurch die momentane Richtung des Teilchens bestimmt ist und wie Sie diese Information mit einer Kenngrösse von U in Zusammenhang bringen können. Am Schluss dieser Überlegungen werden Sie eine Differentialgleichung für y haben, die Sie lösen können.

Auf den folgenden Seiten werden Sie Schritt für Schritt durch die Lösung dieser Aufgabe geführt.

Am Schluss folgen einige Bemerkungen zur Aufgabe.

Start (bitte klicken)

Schritt 1
Welche Kenngrösse von U hilft beim gestellten Problem weiter? Und wie lautet diese Kenngrösse hier?

Ich weiss, was ich nun machen muss

Ich brauche Hilfe

Schritt 1
Welche Kenngrösse von U hilft beim gestellten Problem weiter?
Der **Gradient** ist die gesuchte Kenngrösse. Denn: Stellen Sie sich vor, dass Sie selbst das wärmesuchende Teilchen sind. Wenn Sie an einer beliebigen Stelle in der ab-Ebene stehen, zeigt der Gradient an dieser Stelle in diejenige Richtung, in welcher die Temperatur am schnellsten zunimmt. Dies ist gerade die Richtung, in welcher das wärmesensitive Teilchen gehen muss. Im vorliegenden Fall lautet der Gradient

$$\nabla U = \begin{pmatrix} -e^{-2b}\cos(a) \\ 2e^{-2b}\sin(a) \end{pmatrix}$$

Schritt 2
Was bedeutet dies nun für die gesuchte Bahn des Teilchens?

Ich weiss, was ich nun machen muss

Ich brauche Hilfe

Schritt 1
Welche Kenngrösse von U hilft beim gestellten Problem weiter?
Der **Gradient** ist die gesuchte Kenngrösse. Denn: Stellen Sie sich vor, dass Sie selbst das wärmesuchende Teilchen sind. Wenn Sie an einer beliebigen Stelle in der ab-Ebene stehen, zeigt der Gradient an dieser Stelle in diejenige Richtung, in welcher die Temperatur am schnellsten zunimmt. Dies ist gerade die Richtung, in welcher das wärmesensitive Teilchen gehen muss. Im vorliegenden Fall lautet der Gradient

$$\nabla U = \begin{pmatrix} -e^{-2b}\cos(a) \\ 2e^{-2b}\sin(a) \end{pmatrix}$$

Schritt 2
Was bedeutet dies nun für die gesuchte Bahn des Teilchens?
Der Gradient zeigt in jedem Punkt in die Richtung des steilsten Anstiegs und damit entlang der Tangente (ist ja bekanntlich eine Gerade) der Bahn des Teilchens. Mit Hilfe des **Steigungsdreiecks** erhalten wir damit die Steigung (skalare Grösse) der gesuchten Bahn $y(a)$ an einem beliebigen Punkt, also

$$\dot{y}(a) = \frac{2e^{-2b}\sin(a)}{-e^{-2b}\cos(a)} = -2\tan(a)$$

Schritt 3
Was folgt nun aus dieser letzten Gleichung?

Ich weiss, was ich nun machen muss

Ich brauche Hilfe

Schritt 1
Welche Kenngrösse von U hilft beim gestellten Problem weiter?
Der **Gradient** ist die gesuchte Kenngrösse. Denn: Stellen Sie sich vor, dass Sie selbst das wärmesuchende Teilchen sind. Wenn Sie an einer beliebigen Stelle in der ab-Ebene stehen, zeigt der Gradient an dieser Stelle in diejenige Richtung, in welcher die Temperatur am schnellsten zunimmt. Dies ist gerade die Richtung, in welcher das wärmesensitive Teilchen gehen muss. Im vorliegenden Fall lautet der Gradient

$$\nabla U = \begin{pmatrix} -e^{-2b}\cos(a) \\ 2e^{-2b}\sin(a) \end{pmatrix}$$

Schritt 2
Was bedeutet dies nun für die gesuchte Bahn des Teilchens?
Der Gradient zeigt in jedem Punkt in die Richtung des steilsten Anstiegs und damit entlang der Tangente (ist ja bekanntlich eine Gerade) der Bahn des Teilchens. Mit Hilfe des **Steigungsdreiecks** erhalten wir damit die Steigung (skalare Grösse) der gesuchten Bahn $y(a)$ an einem beliebigen Punkt, also

$$\dot{y}(a) = \frac{2e^{-2b}\sin(a)}{-e^{-2b}\cos(a)} = -2\tan(a)$$

Schritt 3
Was folgt nun aus dieser letzten Gleichung?
Es liegt eine gewöhnliche **Differentialgleichung** vor, wie wir sie aus Analysis A kennen und lösen können: Integrieren wir die rechte Seite der Differentialgleichung, erhalten wir

$$y(a) = 2\ln(|\cos(a)|) + C$$

Schritt 4
Sind wir jetzt fertig?

Ich weiss, was ich nun machen muss

Ich brauche Hilfe

Schritt 1
Welche Kenngrösse von U hilft beim gestellten Problem weiter?
Der **Gradient** ist die gesuchte Kenngrösse. Denn: Stellen Sie sich vor, dass Sie selbst das wärmesuchende Teilchen sind. Wenn Sie an einer beliebigen Stelle in der ab-Ebene stehen, zeigt der Gradient an dieser Stelle in diejenige Richtung, in welcher die Temperatur am schnellsten zunimmt. Dies ist gerade die Richtung, in welcher das wärmesensitive Teilchen gehen muss. Im vorliegenden Fall lautet der Gradient

$$\nabla U = \begin{pmatrix} -e^{-2b}\cos(a) \\ 2e^{-2b}\sin(a) \end{pmatrix}$$

Schritt 2
Was bedeutet dies nun für die gesuchte Bahn des Teilchens?
Der Gradient zeigt in jedem Punkt in die Richtung des steilsten Anstiegs und damit entlang der Tangente (ist ja bekanntlich eine Gerade) der Bahn des Teilchens. Mit Hilfe des **Steigungsdreiecks** erhalten wir damit die Steigung (skalare Grösse) der gesuchten Bahn $y(a)$ an einem beliebigen Punkt, also

$$\dot{y}(a) = \frac{2e^{-2b}\sin(a)}{-e^{-2b}\cos(a)} = -2\tan(a)$$

Schritt 3
Was folgt nun aus dieser letzten Gleichung?
Es liegt eine gewöhnliche **Differentialgleichung** vor, wie wir sie aus Analysis A kennen und lösen können: Integrieren wir die rechte Seite der Differentialgleichung, erhalten wir

$$y(a) = 2\ln(|\cos(a)|) + C$$

Schritt 4
Sind wir jetzt fertig?
Wir müssen in einem letzten Schritt noch die Startposition des Teilchens berücksichtigen, mit anderen Worten die **Anfangsbedingung** berücksichtigen: Es soll gelten $y(0) = 1$. Dies führt uns zur folgenden Gleichung

$$1 = y(0) = 2\ln(|\cos(0)|) + C = 2\ln(1) + C = 0 + C,$$

woraus wir nun folgern, dass $C = 1$ sein muss.

Zusammengefasst lautet also die gesuchte Bahn

$$y(a) = 2\ln(|\cos(a)|) + 1$$

Ein paar Bemerkungen

i) Zuallererst wollen wir uns die Situation noch graphisch vor Augen führen. In der untenstehenden Graphik sind sowohl für einige Punkte der Gradient von U (blau), sowie auch die gefundene Bahn (grün) eingezeichnet. Wie man leicht sieht, verlaufen die Gradienten jeweils wirklich tangential zur Bahn.
Wenn wir die Idee weiterverfolgen, in jedem Punkt der ab-Ebene den entsprechenden Gradienten einzuzeichnen, ist dies, etwas allgemeiner betrachtet, nichts Anderes, als dass wir jedem Punkt in der ab-Ebene einen Vektor zuordnen. Das ist gerade das Konzept des **Vektorfeldes**. Dieses Konzept werden wir gegen Ende der Vorlesung noch genauer studieren und uns insbesondere die Frage stellen, was ein solches Vektorfeld im Zusammenhang mit Differentialgleichungen leisten kann.
Zur grösseren Klarheit der Graphik wurde alles mit einem Faktor 2 reskaliert.

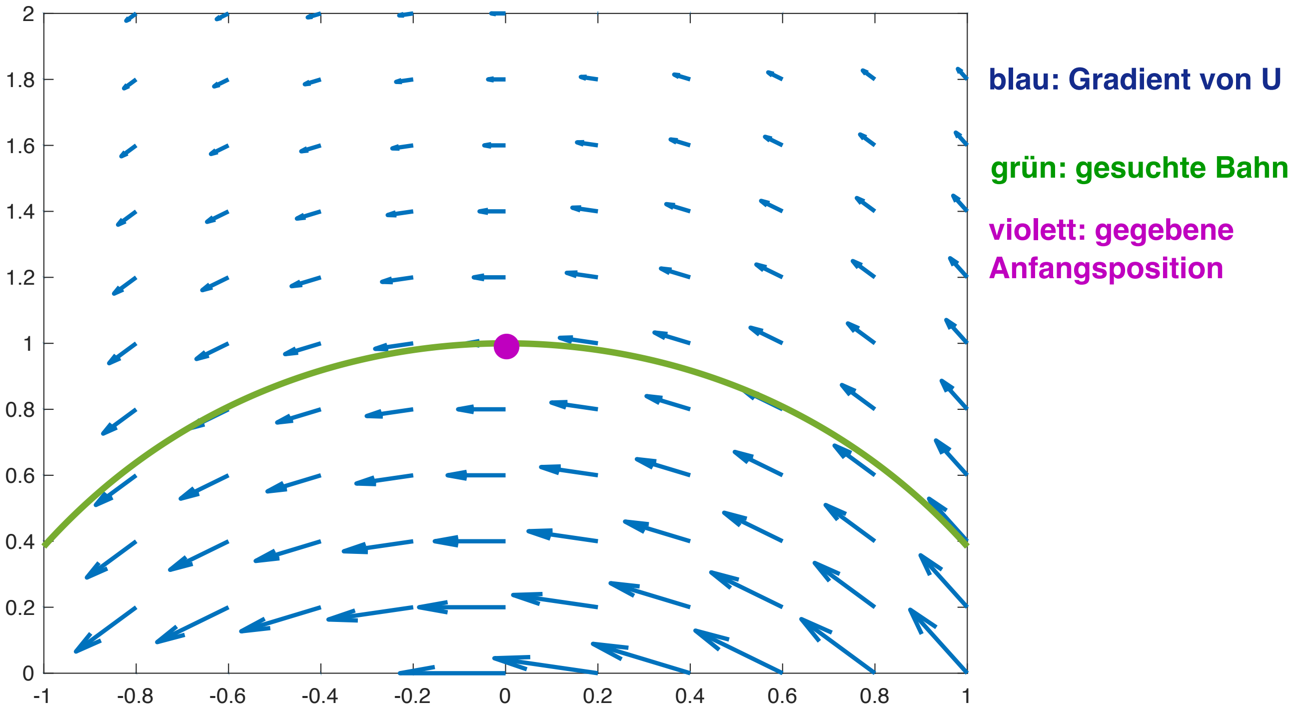

Abbildung 1: $U(a,b) = -e^{-2b}\sin(a)$: Gradienten und gesuchte Bahn

ii) Leider ist bei einer ersten Version der Aufgabe fälschlicherweise die Funktion $U(a,b) = -e^{-2b}\cos(a)$ angegeben worden. Wenn Sie die vorangehenden Überlegungen mit dieser Funktion machen, kann am Schluss die Anfangsposition nicht eingesetzt werden. Die Aufgabe lässt sich aber mit der geometrischen Veranschaulichung, die wir bereits in i) gesehen haben, dennoch lösen: Die gesuchte Bahn verläuft entlang der positiven b-Achse nach oben (siehe Skizze unten).

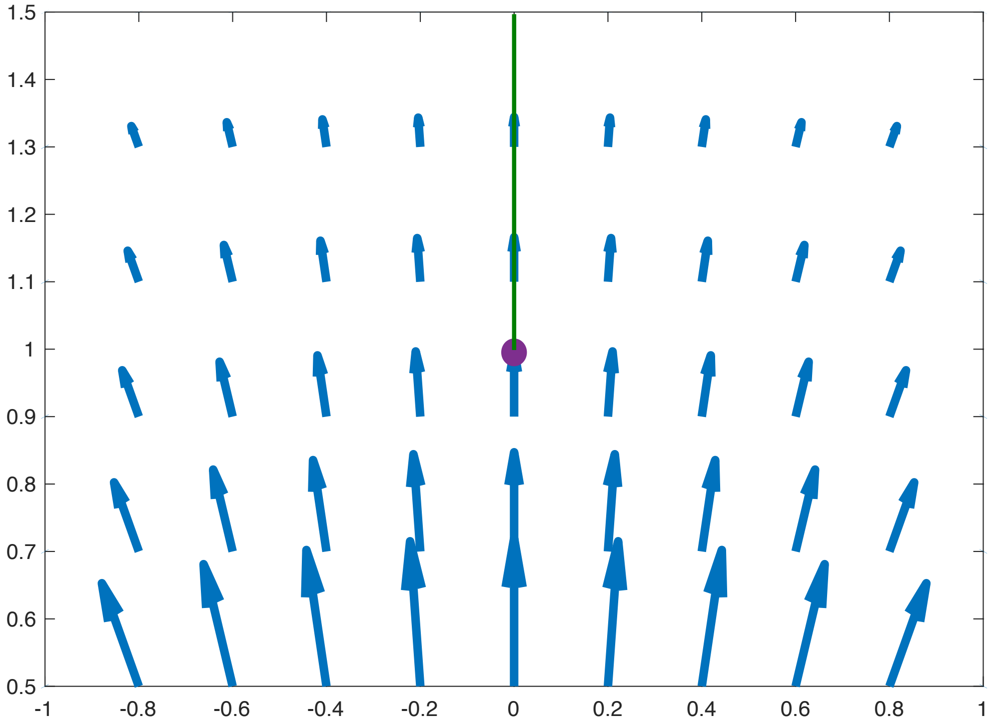

Abbildung 2: $U(a,b) = -e^{-2b}\cos(a)$: Gradienten und gesuchte Bahn