Herleitung einer Differentialgleichung

Laura Keller

Situation

Wir betrachten den folgenden Vorgang:
Ein Tank enthält am Anfang 400l Salzlösung, in der 100kg Salz gelöst sind. Pro Minute fließen 12l einer Salzlösung mit der Konzentration 0.125kg/l in den Tank. Die Mischung wird durch ständiges Rühren gleichmäßig gehalten und während des gesamten betrachteten Prozesses ist das Volumen der Lösung im Tank konstant.
Für die weiteren Überlegungen sei $c(t)$ die unbekannte Menge Salz im Tank zum Zeitpunkt t.
Unser Ziel ist es, eine Differentialgleichung für $c(t)$ herzuleiten.

Ich habe eine Idee

Hilfe

Situation

Wir betrachten den folgenden Vorgang:
Ein Tank enthält am Anfang 400l Salzlösung, in der 100kg Salz gelöst sind. Pro Minute fließen 12l einer Salzlösung mit der Konzentration 0.125kg/l in den Tank. Die Mischung wird durch ständiges Rühren gleichmäßig gehalten und während des gesamten betrachteten Prozesses ist das Volumen der Lösung im Tank konstant.
Für die weiteren Überlegungen sei $c(t)$ die unbekannte Menge Salz im Tank zum Zeitpunkt t (in kg).
Unser Ziel ist es, eine Differentialgleichung für $c(t)$ herzuleiten und diese zu lösen.

Schritt 1

Wir betrachten ein kleines Zeitintervall, z. B. eine Minute, und überlegen uns, wie sich die Salzmenge im Tank in diesem Zeitraum verändert.

Zufluss

Pro Zeitintervall Δt (in Minuten gemessen) fliesst

$$\frac{12l}{min} \cdot \frac{0.125kg}{l} \cdot \Delta t$$

Salz in den Tank.

Abfluss

Da das Volumen der Lösung konstant sein soll, müssen pro Minuten gleich viele Liter abfliessen, wie zufliessen.
Ausserdem müssen wir noch wissen, wie wir die abfliessende Salzmenge beschreiebn können. Dies ergibt sich daraus, dass - durch das ständige Rühren - die Konzentration des Abflusses gerade der aktuellen Konzentration im Tank entspricht.
Damit haben wir für den Abfluss pro Zeitintervall Δt (in Minuten gemessen und so klein, dass die Konzentration im Tank als konstant angesehen werden kann)

$$\frac{12l}{min} \cdot \frac{c(t)}{400l} \cdot \Delta t$$

Ich weiss wie weiter

Situation

Wir betrachten den folgenden Vorgang:
Ein Tank enthält am Anfang 400l Salzlösung, in der 100kg Salz gelöst sind. Pro Minute fließen 12l einer Salzlösung mit der Konzentration 0.125kg/l in den Tank. Die Mischung wird durch ständiges Rühren gleichmäßig gehalten und während des gesamten betrachteten Prozesses ist das Volumen der Lösung im Tank konstant.
Für die weiteren Überlegungen sei $c(t)$ die unbekannte Menge Salz im Tank zum Zeitpunkt t (in kg).
Unser Ziel ist es, eine Differentialgleichung für $c(t)$ herzuleiten und diese zu lösen.

Schritt 1

Wir betrachten ein kleines Zeitintervall, z. B. eine Minute, und überlegen uns, wie sich die Salzmenge im Tank in diesem Zeitraum verändert.

Zufluss

Pro Zeitintervall Δt (in Minuten gemessen) fliesst

$$\frac{12l}{min} \cdot \frac{0.125kg}{l} \cdot \Delta t$$

Salz in den Tank.

Abfluss

Da das Volumen der Lösung konstant sein soll, müssen pro Minuten gleich viele Liter abfliessen, wie zufliessen.
Ausserdem müssen wir noch wissen, wie wir die abfliessende Salzmenge beschreiebn können. Dies ergibt sich daraus, dass - durch das ständige Rühren - die Konzentration des Abflusses gerade der aktuellen Konzentration im Tank entspricht.
Damit haben wir für den Abfluss pro Zeitintervall Δt (in Minuten gemessen und so klein, dass die Konzentration im Tank als konstant angesehen werden kann)

$$\frac{12l}{min} \cdot \frac{c(t)}{400l} \cdot \Delta t$$

Schritt 2

Mi Hilfe der obigen Informationen kann die folgende Veränderungsbilanz aufgeschrieben werden:
Im Zeitintervall Δt ändert sich die Salzmenge im Tank um

$$\frac{12l}{min} \cdot \frac{0.125kg}{l} \cdot \Delta t - \frac{12l}{min} \cdot \frac{c(t)}{400l} \cdot \Delta t$$

Wenn wir nun noch die physikalischen Einheiten weglassen lautet diese Veränderung im Zeitintervall Δt

$$12 \cdot 0.125 \cdot \Delta t - 12 \cdot \frac{c(t)}{400} \cdot \Delta t = 1,5\Delta t - 0.03 \cdot c(t) \cdot \Delta t$$

$Ich\ sehe\ die\ Differentialgleichung$

Hilfe

Situation

Wir betrachten den folgenden Vorgang:
Ein Tank enthält am Anfang 400l Salzlösung, in der 100kg Salz gelöst sind. Pro Minute fließen 12l einer Salzlösung mit der Konzentration 0.125kg/l in den Tank. Die Mischung wird durch ständiges Rühren gleichmäßig gehalten und während des gesamten betrachteten Prozesses ist das Volumen der Lösung im Tank konstant.
Für die weiteren Überlegungen sei $c(t)$ die unbekannte Menge Salz im Tank zum Zeitpunkt t (in kg).
Unser Ziel ist es, eine Differentialgleichung für $c(t)$ herzuleiten und diese zu lösen.

Schritt 1

Wir betrachten ein kleines Zeitintervall, z. B. eine Minute, und überlegen uns, wie sich die Salzmenge im Tank in diesem Zeitraum verändert.

Zufluss

Pro Zeitintervall Δt (in Minuten gemessen) fliesst

$$\frac{12l}{min} \cdot \frac{0.125kg}{l} \cdot \Delta t$$

Salz in den Tank.

Abfluss

Da das Volumen der Lösung konstant sein soll, müssen pro Minuten gleich viele Liter abfliessen, wie zufliessen.
Ausserdem müssen wir noch wissen, wie wir die abfliessende Salzmenge beschreiebn können. Dies ergibt sich daraus, dass - durch das ständige Rühren - die Konzentration des Abflusses gerade der aktuellen Konzentration im Tank entspricht.
Damit haben wir für den Abfluss pro Zeitintervall Δt (in Minuten gemessen und so klein, dass die Konzentration im Tank als konstant angesehen werden kann)

$$\frac{12l}{min} \cdot \frac{c(t)}{400l} \cdot \Delta t$$

Schritt 2

Mi Hilfe der obigen Informationen kann die folgende Veränderungsbilanz aufgeschrieben werden:
Im Zeitintervall Δt ändert sich die Salzmenge im Tank um

$$\frac{12l}{min} \cdot \frac{0.125kg}{l} \cdot \Delta t - \frac{12l}{min} \cdot \frac{c(t)}{400l} \cdot \Delta t$$

Wenn wir nun noch die physikalischen Einheiten weglassen lautet diese Veränderung im Zeitintervall Δt

$$12 \cdot 0.125 \cdot \Delta t - 12 \cdot \frac{c(t)}{400} \cdot \Delta t = 1,5\Delta t - 0.03 \cdot c(t) \cdot \Delta t$$

Schritt 3

Aus den vorangehenden Überlegungen kann die folgende Beziehung aufgestellt werden

$$c(t + \Delta t) - c(t) = 1,5\Delta t - 0.03 \cdot c(t) \cdot \Delta t$$

Nun kann in der obigen Gleichung durch Δt dividiert werden

$$\frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} = 1,5 - 0.03 \cdot c(t) \cdot$$

Betrachtet man nun den Grenzwert $\Delta t \to 0$ erhalten wir nun die folgende Differentialgleichung

$$\dot{c}(t) = 1,5 - 0.03 \cdot c(t) \cdot$$

Hilfe