

Kräfte beim Skifahrer im Lift:

Kräftegleichgewicht!

orthogonal:

$$F_N = F_{\perp} - F_{up} = mg \cos \alpha - F_{up} \approx mg \cos \alpha$$

parallel:

$$F_L = F_{||} + F_R = mg \sin \alpha + \mu F_N \approx mg \left(\sin \alpha + \mu \cos \alpha\right)$$

Implizite Annahme: $F_{up} \ll F_{\perp}$

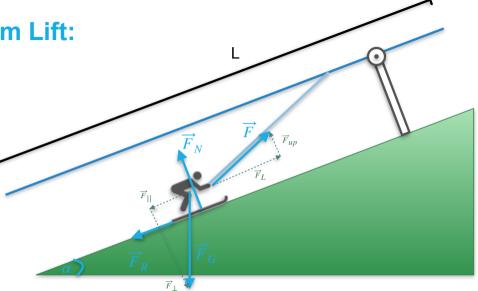
Sonst fehlt eine Angabe!

Motor des Lifts muss nur \overrightarrow{F}_L aufbringen.

 \overrightarrow{F}_{up} wird von Stütze geliefert.

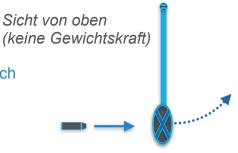
 $W = F_L \cdot L$





Warm - up Clicker

Wie abgebildet wird eine Gewehrkugel auf ein Ziel geschossen, welches sich nach hinten wegdrehen kann. Wir vernachlässigen Reibungseffekte. Die Kugel bleibt dabei stecken. Welche Aussagen sind richtig?



- A) Die gesamte kinetische Energie der Kugel wird in die Rotation um das Zentrum umgewandelt.
- B) Auch ohne Betrachtung der Reibung geht Energie in die Deformation der Objekte.
- C) Der Drehimpuls des Gesamtsystems ist hier nicht erhalten: Vor dem Auftreffen ist der gesamte Drehimpuls null.
- D) Die Kugel wirkt beim Aufprall mit einem Moment auf das Pendel und ändert seinen Drehimpuls. Insgesamt bleibt der Drehimpuls aber erhalten.

Themen heute

Drehimpuls

Erhaltungssätze

Stösse

Drehmoment und Drehimpuls

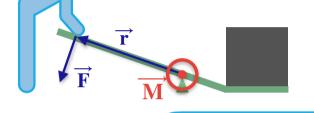
Moment

"Mächtig ist des Schlossers Kraft, wenn er mit dem Hebel schafft."

Drehmoment

$$\overrightarrow{\mathbf{M}} = \overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}} = \mathbf{m} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{a}})$$
$$[M] = \text{Nm}$$

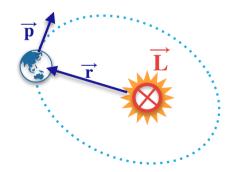
→ Vektor parallel zur Drehachse



Drehimpuls

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{p}} = \mathbf{m} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}})$$
$$[L] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

 \rightarrow senkrecht auf \vec{r} und \vec{v}



Zusammenhang:

Drehmoment verursacht Änderung des Drehimpulses

$$\vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

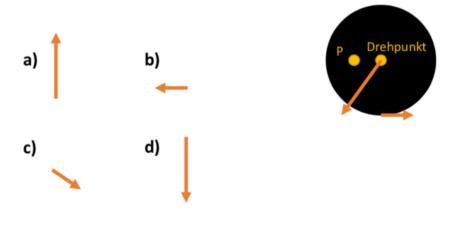
 \overrightarrow{M} verhält sich zu \overrightarrow{L} , wie \overrightarrow{F} zu \overrightarrow{p} :

$$\dot{\overrightarrow{\mathbf{p}}} = \overrightarrow{\mathbf{F}}$$

Kendama

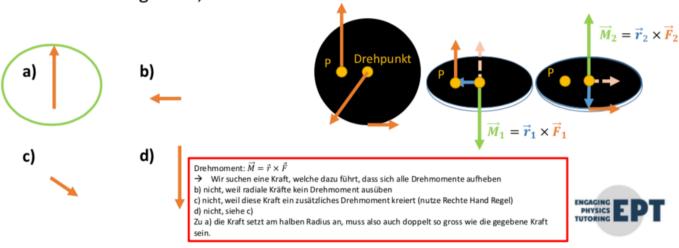
https://www.youtube.com/watch?v=9WiGCfxA-UA

Gezeigt ist eine Scheibe, an der 2 Kräfte wirken. Welche 3. Kraft muss im Punkt P angreifen, damit das resultierende Drehmoment = 0 ist?





Gezeigt ist eine Scheibe, an der 2 Kräfte wirken. Welche 3. Kraft muss im Punkt P angreifen, damit das resultierende Drehmoment = 0 ist?



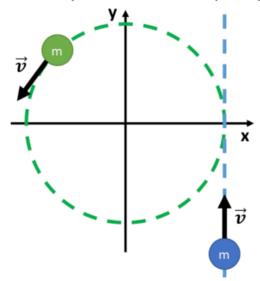
Beide Kugeln haben einen Drehimpuls um den Ursprung herum.

Welche Aussage stimmt?

a)
$$\left| \vec{L}_{gr\ddot{\mathbf{u}}n} \right| < \left| \vec{L}_{blau} \right|$$

b)
$$\left| \vec{L}_{gr\ddot{\mathbf{u}}n} \right| = \left| \vec{L}_{blau} \right|$$

c)
$$\left| \vec{L}_{gr\ddot{\mathbf{u}}n} \right| > \left| \vec{L}_{blau} \right|$$



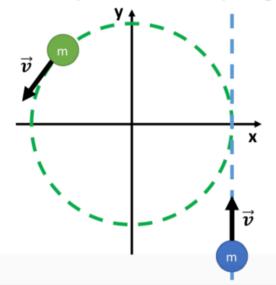


Beide Kugeln haben einen Drehimpuls um den Ursprung herum.

Welche Aussage stimmt?



- b) $\left| \vec{L}_{gr\"{u}n} \right| = \left| \vec{L}_{blau} \right|$
- c) $\left| \vec{L}_{gr\ddot{\mathbf{u}}n} \right| > \left| \vec{L}_{blau} \right|$



Drehimpuls ist erhalten, und am Punk (x,0) haben klarerweise beide denselben Drehimpuls

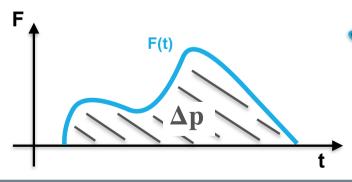


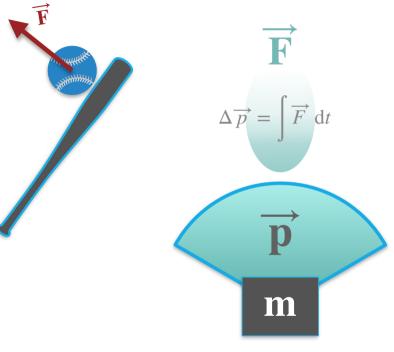
Grundidee beim Kraftstoss:

Verlauf der Kraft über Zeit ist oft zu komplex für Berechnung.

Betrachte stattdessen Impulsübertrag, der insgesamt stattfindet!

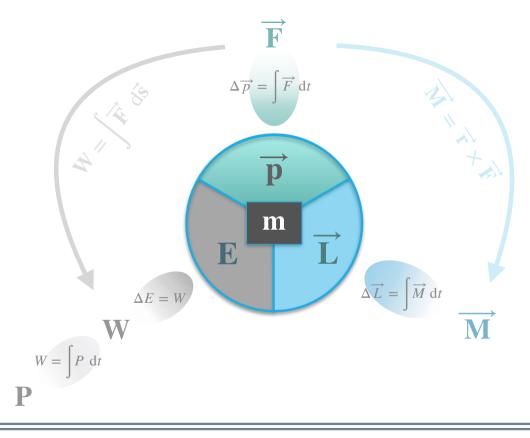
 \Rightarrow Integral





Mechanik von Massenpunkten

die zentralen Grössen



Energieerhaltung

Gesamtenergie im abgeschlossenen System bleibt erhalten.

$$\mathbf{E_{tot}} = \mathbf{E_{kin}} + \mathbf{E_{pot}} + \dots = \text{const.}$$

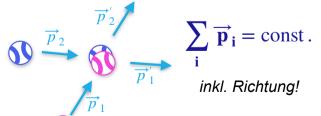
"abgeschlossen": Kein Energieaustausch von/nach aussen

Richtung egal! $E_{tot} = E_{pot} + E_{kin}$ $E_{tot} = E_{feder}$

Erhaltungssätze

Impulserhaltung

Summe aller Impulse ist konstant, wenn keine äussere Kraft wirkt



Drehimpulserhaltung

$$\sum_{i} \overrightarrow{L}_{i} = const.$$
 auch Drehachse bleibt erhalten!

Gesamtdrehimpuls im System bleibt konstant, wenn kein externes Drehmoment wirkt



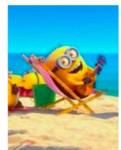
Es ist ein schöner Tag, ich sitze im Liegestuhl auf der Veranda und geniesse das Leben. Leider habe ich vergessen die Veranda-Türe zu schliessen (Fliegen und so...). Ich habe absolut keine Lust aufzustehen und glücklicherweise habe ich 2 Bälle neben mir liegen: 1) ein perfekt klebriger Ball, 2) ein perfekt elastischer Flummi. Beide haben dieselbe Masse. Welchen sollte ich werfen, damit die Tür sicher zugeht?



- a) Den klebrigen Ball.
- b) Den elastischen Flummi.
- c) Ist egal.



Es ist ein schöner Tag, ich sitze im Liegestuhl auf der Veranda und geniesse das Leben. Leider habe ich vergessen die Veranda-Türe zu schliessen (Fliegen und so...). Ich habe absolut keine Lust aufzustehen und glücklicherweise habe ich 2 Bälle neben mir liegen: 1) ein perfekt klebriger Ball, 2) ein perfekt elastischer Flummi. Beide haben dieselbe Masse. Welchen sollte ich werfen, damit die Tür sicher zugeht?



- a) Den klebrigen Ball.
- b) Den elastischen Flummi.
- c) Ist egal.

Der maximale Impulsübertrag des klebrigen Balles ist $\Delta p = p_{Ball}$. Der maximale Impulsübertrag des Flummis ist allerdings $|\Delta p| = 2p_{Ball}$ weil er ja nicht nur gestoppt wird, sondern mit $\vec{p}'_{Ball} = -\vec{p}_{Ball}$ von der Tür zurückkommt. Der Flummi ist also die bessere Wahl.



Stösse von 2 Massen

voll elastisch



♦ Impulsbilanz: $m_1v_1 + m_2$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

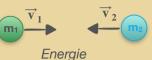
◆ Energiebilanz

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}$$

♦ Geschwindigkeit v'_1 nach Stoss

$$v_1' = 2 \cdot \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1$$

Vor Stoss



Impuls

$$\sum p_i = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$E_{kin} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

voll inelastisch



♦ Impulsbilanz:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$$

- ♦ Geschwindigkeit nach Stoss: $v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$
- ◆ Energie nach Stoss:

$$E'_{kin} = \frac{\left(m_1 + m_2\right){v'}^2}{2} \qquad \qquad E'_{kin} = E_{kin} - \Delta U \label{eq:energy_energy}$$

 $\Delta U = {\it Energie}$, die als Arbeit in Verformung gebraucht wird

Rechnen mit Stössen

Kräfte während Stoss zu komplex

- benutze Erhaltungssätze

voll elastisch





Kombiniere Impuls- und Energieerhaltung

$$\sum_{i} \overrightarrow{p}_{i} = \sum_{i} \overrightarrow{p}_{i}' \qquad \qquad \sum_{i} E_{i} = \sum_{i} E_{i}'$$

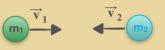
$$\sum_{i} \mathbf{E}_{i} = \sum_{i} \mathbf{E}_{i}^{\prime}$$

Löse dann nach gesuchter Geschwindigkeit auf.

Beispiel zwei Massen, 1D:
$$v_1'=2\cdot\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}-v_1$$

Situation beyor Stoss

Stelle Gesamtimpuls auf



Beispiel zwei Massen, 1D: $\sum p_i = m_1 v_1 + m_2 v_2$

voll inelastisch



Erhalte Geschwindigkeit aus Impulserhaltung

$$\sum_i \overrightarrow{p}_i = \sum_i \overrightarrow{p}_i'$$

Beispiel zwei Massen, 1D: $v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 v_1 + m_2 v_2}$

◆ Energie ∆U geht in Verformung!

$$\Delta U = \sum_i E_i - \sum_i E_i'$$

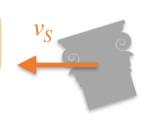
Rückstoss auf dem Eis

Mujinga Kambundji ist mal wieder beim Schlittschuhfahren.

Heute will sie sich durch Rückstoss fortbewegen. Dazu wirft sie aus dem Stand einen schweren Stein ($m_S=20~{\rm kg}$) weg. Nach dem Wurf hat dieser eine Horizontalgeschwindigkeit von $v_S=9~\frac{\rm m}{\rm s}$.

- A) Wie schnell bewegt sich nun Kambundji?
- B) Wie viel Arbeit mussten ihre Muskeln verrichten?







Rückstoss auf dem Eis

A) Wie schnell bewegt sich nun Kambundji? Impulsbilanz:

$$v_0 = 0$$

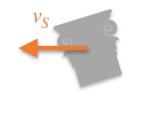
$$m_S = 20 \text{ kg}$$

$$m_K = 60 \text{ kg}$$

$$v_S = 9 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_K = ??$$

B) Wie viel Arbeit mussten ihre Muskeln verrichten?





$$W = \Delta U =$$

Rückstoss auf dem Eis

A) Wie schnell bewegt sich nun Kambundji?

Impulsbilanz: $p_{0,ges} = p'_{ges}$

$$p_{0,ges} = (m_K + m_S) \cdot v_0 = 0$$

$$p'_{ges} = m_K v_K - m_S v_S \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow v_K = \frac{m_S}{m_K} v_S = 3 \frac{m}{s}$$

B) Wie viel Arbeit mussten ihre Muskeln verrichten?

Die Arbeit, die sie aufbringen musste, entspricht Differenz der Gesamtenergie nach dem Stoss und vor dem Stoss.

("inelastischer Stoss rückwärts")

$$W = \Delta U = E'_{ges} - E_{0,ges} = \frac{1}{2} m_S v_S^2 + \frac{1}{2} m_K v_K^2 - 0 = 1.08 \text{ kJ}$$

$$v_0 = 0$$

$$m_S = 20 \text{ kg}$$

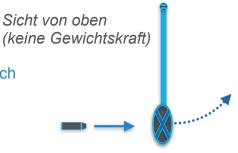
$$m_K = 60 \text{ kg}$$

$$v_S = 9 \text{ m/s}$$



Warm - up Clicker

Wie abgebildet wird eine Gewehrkugel auf ein Ziel geschossen, welches sich nach hinten wegdrehen kann. Wir vernachlässigen Reibungseffekte. Die Kugel bleibt dabei stecken. Welche Aussagen sind richtig?



- A) Die gesamte kinetische Energie der Kugel wird in die Rotation um das Zentrum umgewandelt.
- B) Auch ohne Betrachtung der Reibung geht Energie in die Deformation der Objekte.
- C) Der Drehimpuls des Gesamtsystems ist hier nicht erhalten: Vor dem Auftreffen ist der gesamte Drehimpuls null.
- D) Die Kugel wirkt beim Aufprall mit einem Moment auf das Pendel und ändert seinen Drehimpuls. Insgesamt bleibt der Drehimpuls aber erhalten.

Warm - up Clicker

Wie abgebildet wird eine Gewehrkugel auf ein Ziel geschossen, welches sich nach hinten wegdrehen kann. Wir vernachlässigen Reibungseffekte. Die Kugel bleibt dabei stecken. Welche Aussagen sind richtig?





Die gesamte kinetische Energie der Kugel wird in die Rotation um das Zentrum umgewandelt.

nein, ein Teil geht immer in die Deformation



Auch ohne Betrachtung der Reibung geht Energie in die Deformation der Objekte.



Der Drehimpuls des Gesamtsystems ist hier nicht erhalten: Vor dem Auftreffen ist der gesamte Drehimpuls null. Gesamtdrehimpuls ist erhalten. Am Anfang trägt die Kugel einen Drehimpuls.



Die Kugel wirkt beim Aufprall mit einem Moment auf das Pendel und ändert seinen Drehimpuls. Insgesamt bleibt der Drehimpuls aber erhalten.